Mechanika alapjai

Keresztmetszeti jellemzők

Keresztmetszeti jellemzők

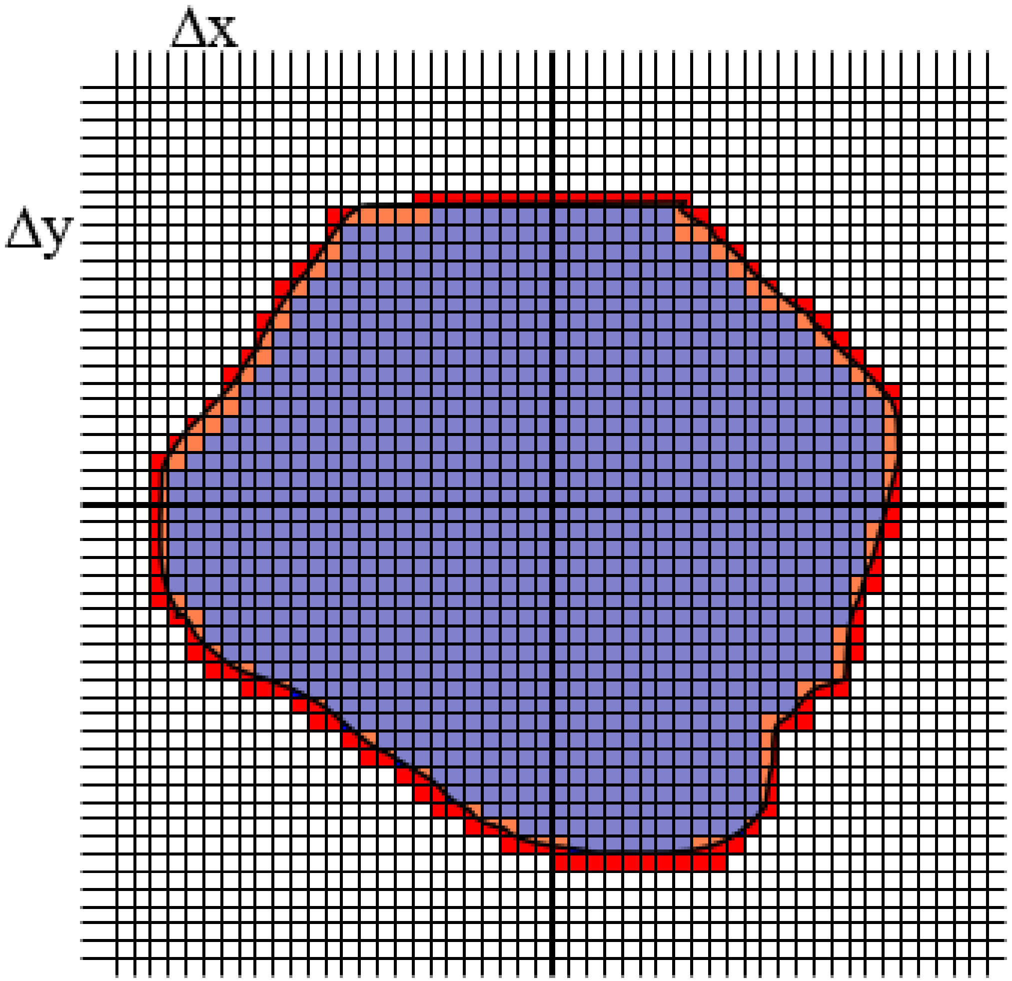
- A rúdszerkezetek méretezése során nem elegendő ismerni a keresztmetszet **egészére** ható erőket (igénybevételeket), hanem az anyagi kapcsolatot pontonként helyettesítő **fajlagos belső erőket** (feszültségeket) kell összehasonlítani az alkalmazott anyag ellenállásával, terhelhetőségével, **szilárdságával**.

Tárgyalt jellemzők

- Nulladrendű nyomaték → Terület
- Elsőrendű nyomaték → Statikai nyomaték
- Másodrendű nyomaték → Tehetetlenségi/Inercia nyomaték

Terület előállítása

- Belső és külső közelítéssel
- Minél finomabb a háló felosztása, annál pontosabb az eredmény
- Ha az elemi téglalap területét minden határon túl csökkentjük, határ-átmenetben a síkidom TÉNYLEGES területét kapjuk meg.

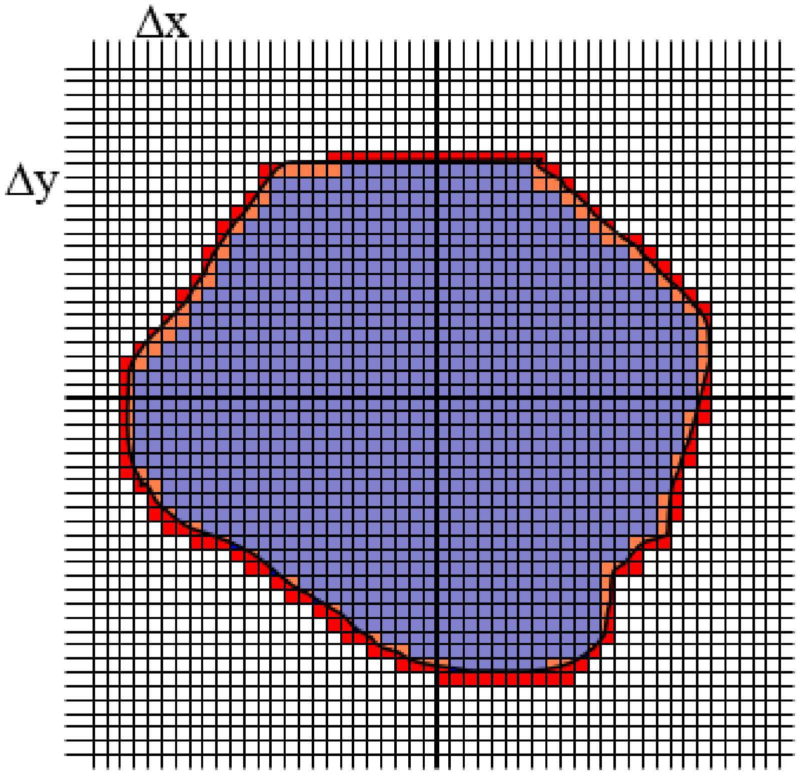


Terület előállítása

$$A_{\min} = \sum_{a\_teljes\_kék\_felületre} \Delta A$$

$$A_{\max} = \sum_{a\_teljes\_piros\_felületre} \Delta A$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} \Delta A$$



$$A = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} dA$$

Matematikai definíciók

Az általános helyzetű elemi síkidom **területösszegének**, **első- ill. másodrendű nyomatékai összegének** szummázása az elemi síkidom oldalainak minden határon túli csökkentésével a keresett mennyiségek **matematikai definícióját**, az elvi meghatározás **integrálkifejezését** szolgáltatja.

$$A = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} dA$$

$$S_y = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} x \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} x dA$$

$$S_x = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} y \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} y dA$$

$$J_y = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} x^2 \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} x^2 dA$$

$$J_x = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} y^2 \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} y^2 dA$$

$$J_\circ = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} (x^2 + y^2) \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} r^2 dA$$

$$C_{xy} = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{a\_teljes\_felületre} xy \Delta A = \int_{a\_teljes\_felületre} xy dA$$

Poláris inercianyomaték

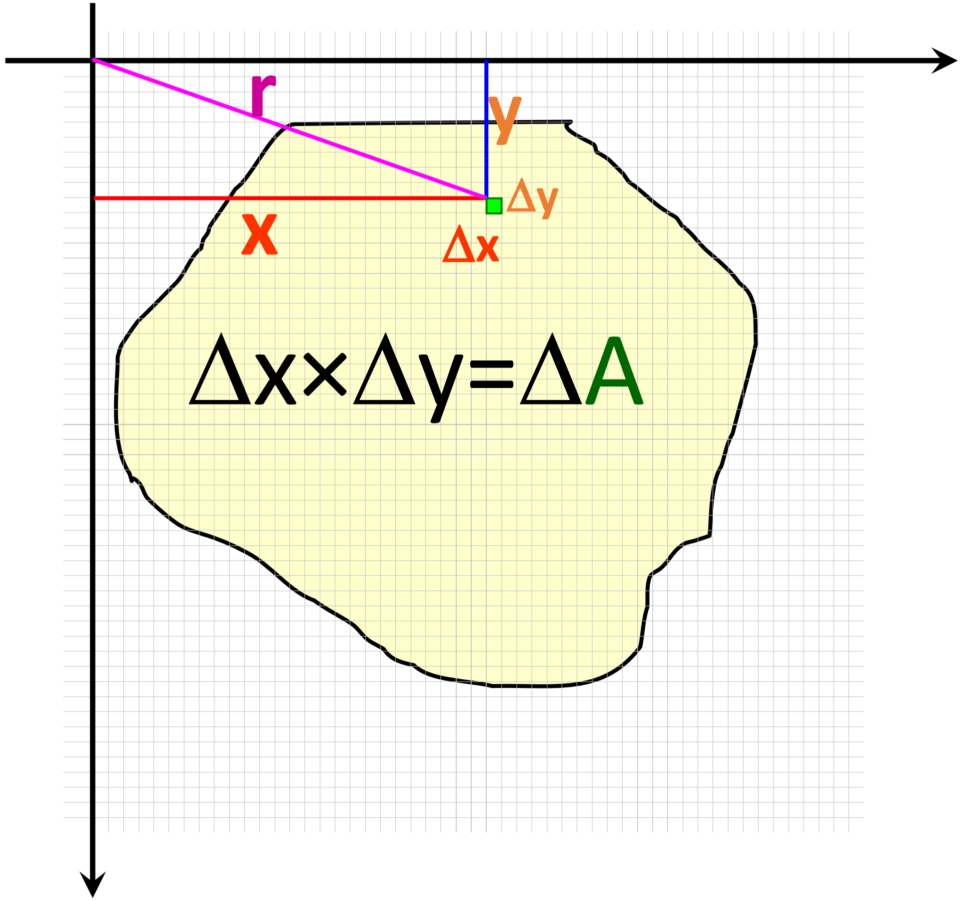
$$J_\circ = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{(A)} r^2 \Delta A = \lim_{\Delta x \to 0; \Delta y \to 0} \sum_{(A)} (x^2 + y^2) \Delta A = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = \int_{(A)} x^2 dA + \int_{(A)} y^2 dA = \int_{(A)} r^2 dA$$

A tehetetlenségi nyomatékokat **mindig egy tengelyre** számítjuk.

A síkból kitekintve értelmezhető a sík **normálisára**, a **z** tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték is, amiben a négyzetesen szereplő távolságot a **z** tengely döféspontjától (a síkbeli koordinátarendszer origójától) mérjük.

Az $\mathbf{r^2=x^2+y^2}$, összefüggés alapján pedig általánosan igaz, hogy:

$$J_\circ = \int_{(A)} r^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = \int_{(A)} x^2 dA + \int_{(A)} y^2 dA = J_y + J_x$$



Steiner-tétel

- A Steiner-tétel segítségével egy síkidom másodrendű nyomatéka határozható meg tetszőleges tengelyre, ha a súlyponti, vele párhuzamos tengelyre ismert a másodrendű nyomaték és a tengelynek a súlyponti tengelytől valótávolsága.

$$I_z = I_{CG} + Ad^2$$

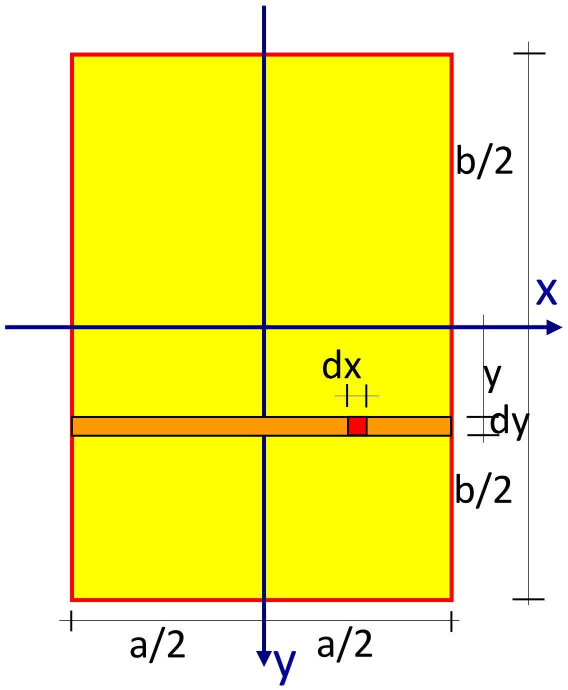
y: távolság az x tengelytől

x: távolság az x tengelytől

A: a rész területe

I_x vagy I_y: az adott rész tehetetlenségi nyomatéka az adott tengelyre

Másodrendű nyomaték - téglalap



$$J_x = \int_{a\_teljes\_felületen} y^2 \quad dA = \int_{-b/2}^{+b/2} \left[\int_{-a/2}^{+a/2} y^2 dx \right] dy$$

$$J_x = \int_{-b/2}^{+b/2} \left[y^2 \int_{-a/2}^{+a/2} dx \right] dy = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \left. x \right|_{-a/2}^{+a/2} dy$$

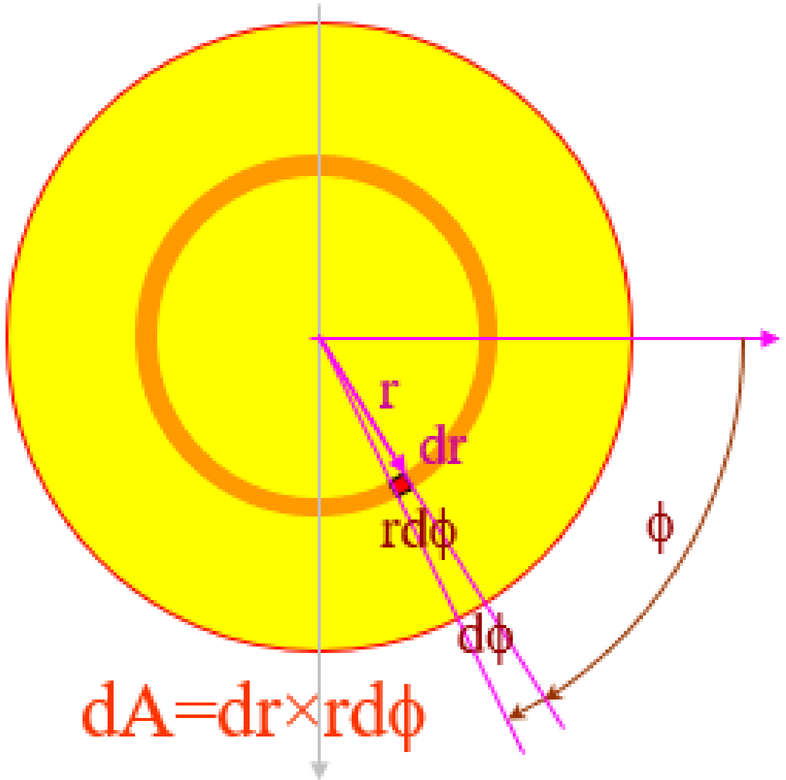
$$J_x = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \left. x \right|_{-a/2}^{+a/2} dy = a \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy$$

$$J_x = a \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy = \frac{a}{3} \Big[y^3 \Big]_{-b/2}^{+b/2} = \frac{a}{3} \left(\frac{b^3}{8} - (\frac{-b^3}{8} \right)$$

$$J_x = \frac{ab^3}{12}$$

Másodrendű nyomaték - kör

A kör esetében célszerűen poláris koordinátarendszert alkalmazva a középpontra vonatkozó poláris inercianyomatékot kaphatjuk meg. A kör szimmetriája alapján azonban ebből adódik, hogy bármely tengelyre a tehetetlenségi nyomaték a poláris tehetetlenségi nyomaték fele lesz.



$$J_\circ = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} r^2 \times r d\phi \right] dr = \int_0^R \left[r^3 \int_0^{2\pi} d\phi \right] dr =$$

$$= \int_0^R \left[r^3 \times 2\pi \right] dr = 2\pi \int_0^R \left[r^3 \right] dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$J_\circ = \frac{\pi R^4}{2} = J_x + J_y = \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4}$$

További másodrendű nyomatékok

Körgyűrű

$$I_s = \frac{\pi}{4}\left({r_2}^4 - {r_1}^4\right)$$

Hatszög

$$I_s = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$$