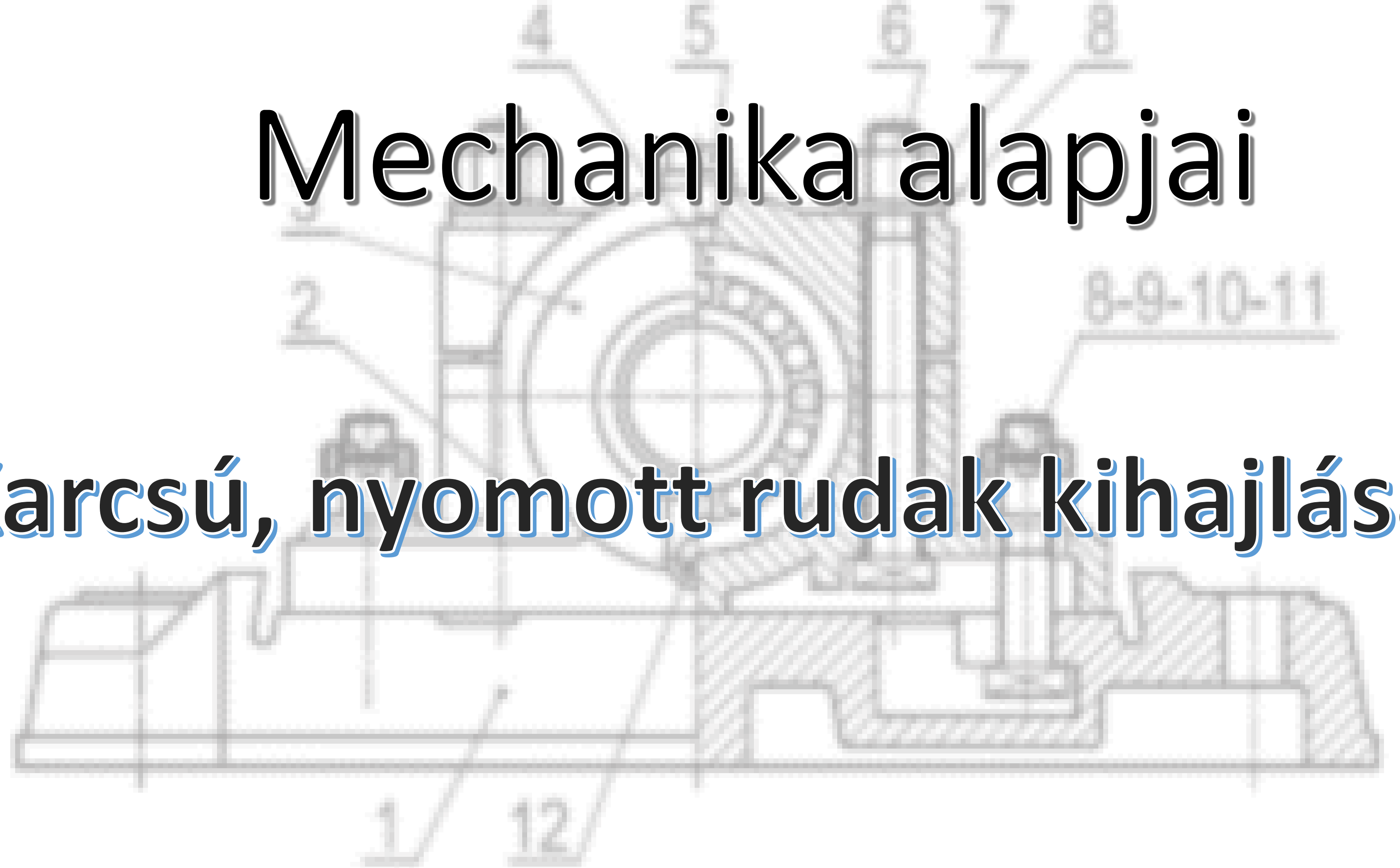
Mechanika alapjai

Karcsú, nyomott rudak kihajlása



Alapfogalmak

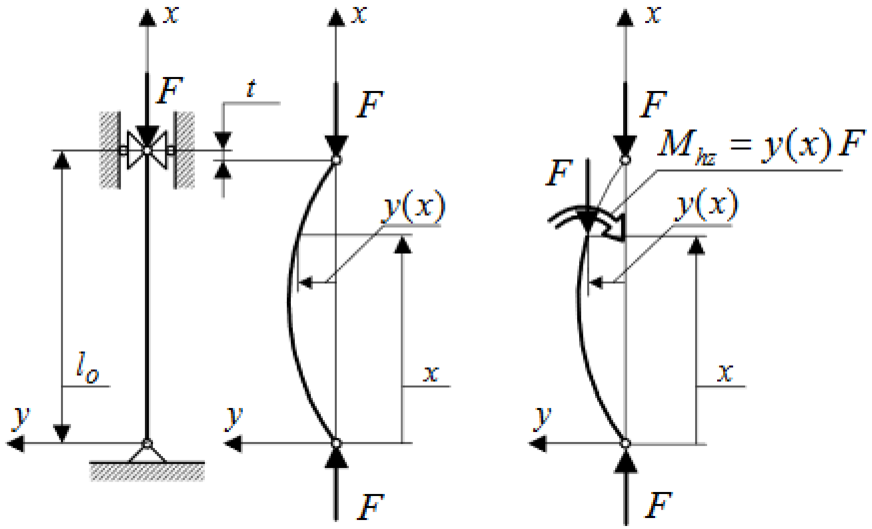
- Karcsú rúd: a rúd hossza sokkal nagyobb, mint a keresztmetszet méretei, és karcsúsági tényezője egy meghatározott értéknél nagyobb.
- Zömök rúd: a rúd hossza nem sokkal nagyobb, mint a keresztmetszet méretei.
- A rúd karcsúságát a karcsúsági tényezővel fogjuk jellemezni.
- Karcsú rudak nyomásánál kihajlási jelenség léphet fel.
- Centrikus nyomás: az F nyomóerő a rúd keresztmetszetének S súlypontjában támad.

- Tapasztalat: Az F erőt növelve, egy küszöb fölött a rúd meggörbül, hirtelen nagy elmozdulások lépnek fel (a rúd kihajlik), amelyek a rúd tönkremenetelét okozhatják.

Alapfogalmak

- Stabilitásvesztés: A rudat az egyenes helyzetből kis hatással kimozdítva, a rúd nem tér vissza az egyenes alakhoz.
- A rúdnak két egyensúlyi helyzete van.
  - Az egyik az egyenes alak, ami labilis,
  - a másik a görbült alak, ami stabil egyensúlyi alak.
- F_{krit}- kritikus erő: az erőnek azon értéke, amelynél a stabilitásvesztés bekövetkezik.

Kritikus erő meghatározása



$y(x)$ - a rúd középvonalának elmozdulása a meggörbült helyzetben.

A rúd igénybevételei a meggörbült helyzetben:

- *Nyomás:* $N(x) = -F$, ahol $F \geq F_{krit}$.
- *Hajlítás:* $M_{hz}(x) = y(x)F$, ahol $F \geq F_{krit}$.

A rugalmas vonal (S ponti szál *Euler*-féle) differenciálegyenlete:

$$y'' = \frac{d^2 y(x)}{d x^2} = -\frac{M_{hz}(x)}{E I_z} = -\frac{F}{E I_z} y(x).$$

Az egyenletet egy oldalra rendezve: $y''(x) + \frac{F}{EI_z} y(x) = 0$.

Ez az egyenlet másodrendű, közönséges, lineáris, állandó együtthatójú, hiányos, homogén differenciál egyenlet.

Jelölés: $\alpha^2 = \frac{F}{E I_z}$.

A kihajlás *Euler*-féle differenciál egyenlete: $y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0$.

Keressük az $y(x) \neq 0$ megoldást. (Keressük a görbült alak $y(x)$ egyenletét.)

Az egyenlet megoldása (1)

Megoldás: $y(x) = A_0 \cos \alpha x + B_0 \sin \alpha x$.

Peremfeltételek:

$x = 0 \quad y(x=0) = 0 = A_0 \cdot 1 + 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = 0$.

$x = l_0 \quad y(x=l_0) = 0 = B_0 \sin \alpha l_0$.

A $B_0 \sin \alpha l_0$ szorzat vagy akkor zérus, ha $B_0 = 0$, vagy akkor, ha $\sin \alpha l_0 = 0$.

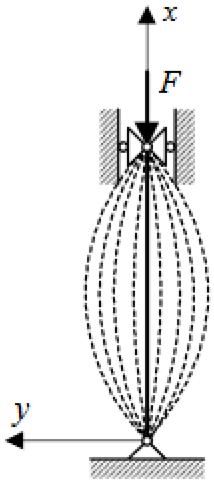
A $B_0 = 0$ a súlyponti szál egyenes alakját jelenti, amitől különböző megoldást keresünk.

Ha $\sin \alpha l_0 = 0$, akkor $B_0 =$ tetszőleges $\neq 0$ érték lehet! (E közelítésben akármekkora nagy érték is lehet!)

A megoldás a peremfeltételek figyelembevétele után:

$y(x) = B_0 \sin \alpha x$ - A görbült alak szinusz félhullám, amelynek amplitúdója határozatlan, mert B_0 tetszőleges.

Az egyenlet megoldása (2)



Probléma:

A B_0 konstans tetszőlegesen nagy is lehet.

$\Downarrow$

Nagy elmozdulások lépnek fel.

$\Downarrow$

A rúd tönkremegy (eltörik).

Mi a feltétele a $B_0 \neq 0$ esetnek?

$\sin \alpha l_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \alpha l_o = k\pi, \quad (k = 1, 2, \ \dots \ , n).$

Ezek közül az erők közül a legkisebb a $k = 1$, és $I_z = I_{\min} = I_2$ esethez tartozik. Már ez a legkisebb erő is problémát okozhat:

$$F_{krit} = F_{krit\ \min} = \pi^2 \frac{EI_{\min}}{l_0^2}.$$

Tapasztalat és az F_{krit}-ra kapott összefüggésből is ez következik: A rúd arra a keresztmetszeti tehetetlenségi főirányra merőleges síkban hajlik ki, amelyre számított tehetetlenségi nyomaték a legkisebb:

$$F_{krit} = F_{krit\ \min} = \pi^2 \frac{EI_{\min}}{l_0^2} = \pi^2 \frac{EI_2}{l_0^2}.$$

Kihajlási határgörbe

A kihajlási határgörbe:

A kritikus erő (a rúd megtámasztási módja mellett) függ a rúd l_0 hosszától és a keresztmetszetnek a hajlítással szembeni legkisebb ellenállására jellemző $I_{\min} = I_2$ másodrendű nyomatéktól. Ennek a rúd geometriáját jellemző két mennyiségnek a függvényében akarjuk meghatározni a rúd tönkremenetele szempontjából kritikus feszültséget.

Átalakítás:

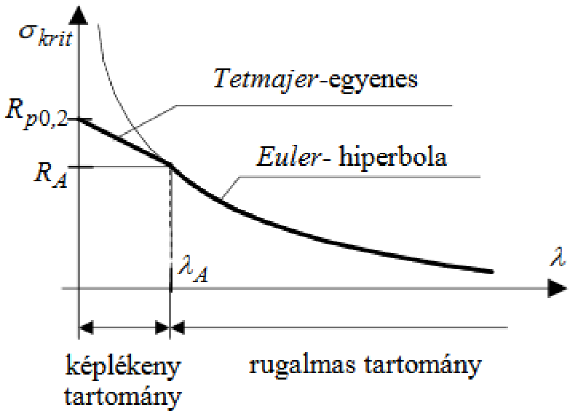
$\sigma_{krit} = \dfrac{F_{krit}}{A} = \pi^2 \dfrac{I_{\min}}{A}\dfrac{E}{l_0^2} = \pi^2 i_{\min}^2 \dfrac{E}{l_0^2}$, ahol $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}$ a minimális inercia sugár.

Karcsúsági tényező: $\lambda = \dfrac{l_0}{i_{\min}} = l_0\sqrt{\dfrac{A}{I_{\min}}}$.

Ez az összefüggés képlékeny kihajlásra érvényes.

Az *Euler*-féle hiperbolát és a *Tetmajer*-féle egyenest diagramban ábrázolva kapjuk a rúd $\sigma_{krit}(\lambda)$ kihajlási határgörbéjét.

Kihajlási határgörbe:



A $\sigma_{krit} \le R_A$ esetben az *Euler*-féle hiperbola adja a kritikus feszültséget:

Euler-féle hiperbola: $\sigma_{krit} = \sigma_{krit}(\lambda) = \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2}$.

λ_A - az $\sigma_{krit} = R_A$-hoz tartozó karcsúsági tényező, vagyis $\lambda_A = \pi\sqrt{\dfrac{E}{R_A}}$.

Euler összefüggés rugalmas kihajlásra ($\sigma_{krit} \le R_A$), vagyis $\lambda \ge \lambda_A$ értékekre érvényes.

A $\sigma_{krit} \ge R_A$, vagyis $\lambda \le \lambda_A$ esetben a *Tetmajer*-féle egyenes adja meg a kritikus feszültséget:

Tetmajer-féle egyenes: $\sigma_{krit} = \sigma_{krit}(\lambda) = -\dfrac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A}\lambda + R_{p0,2}$