

# **SZILÁRDSÁGTAN**

**ISMÉTLÉS**

# ALAPFOGALMAK

**Tárgya:** a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban lévő, alakváltozásra képes testek kinematikájának, dinamikájának és anyagszerkezeti viselkedésének leírása.

**Terhelés:** az általunk vizsgálat rendszerhez nem tartozó testekből származó ismert nagyságú hatások, lényegében az ismert külső erőrendszer

**A tartós nyugalom feltételei:**

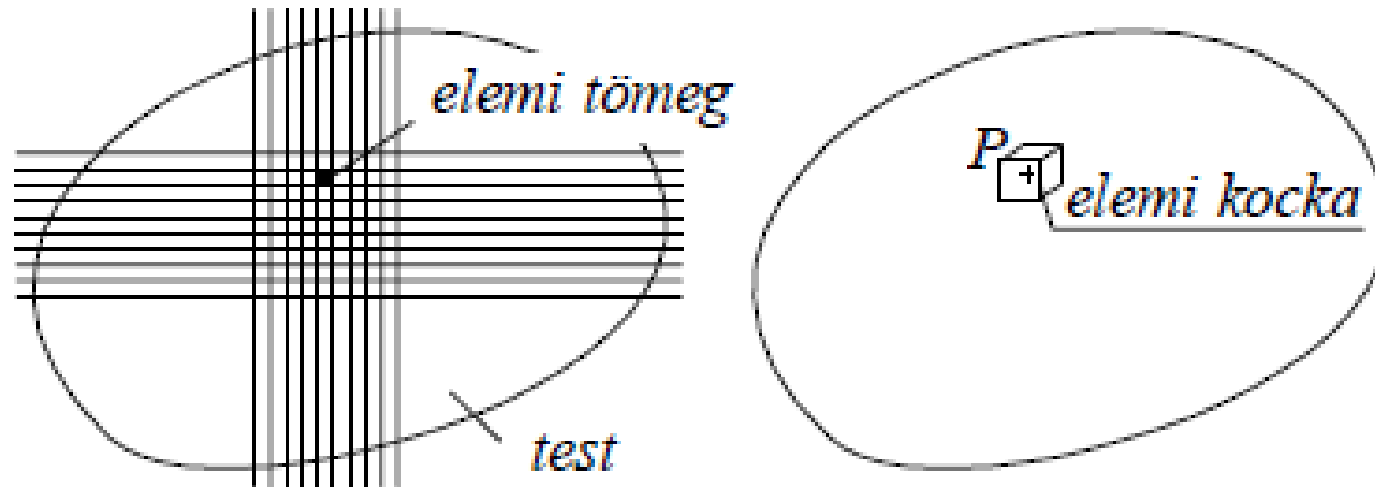
- A testre ható erőrendszer egyensúlyi
- A test megtámasztása nem enged merevtest szerű elmozdulásokat

**Alakváltozás:** a test pontjai terhelés hatására úgy mozdulnak el, hogy a test anyagi geometriai alakzatai megváltoznak.

**Anyagi geometriai alakzat:** a test pontjaival együttmozgó, együtt alakváltozó geometriai alakzat.

# ELEMI KÖRNYEZET

Miniden test felírható végtelen sok tömegpontból felépülő rendszerként.



(Az elemi tömegméretei (geometriai méretek, térfogat, tömeg) a test méretéhez képest kicsi)

# ELEMI KÖRNYEZET

A P ponthoz kapcsolódó mennyiségek három csoportra oszthatók:

## Skalár mennyiségek

Egy nagysággal és egy mértékegységgel adhatók meg.

Tömegsűrűség

Alakváltozási energia

## Vektor mennyiségek

Nagysága (és mértékegysége) mellett rendelkezik iránnyal és ételemmel is.

Elmozdulás vektor

Szögelfordulási vektor

## Tenzor mennyiségek

A viszonyítási rendszertől független egyenleteket tartalmaz az adott rendszerre vonatkozóan, lényegében a skalár és a vektor általánosítása.

Feszültségi tenzor

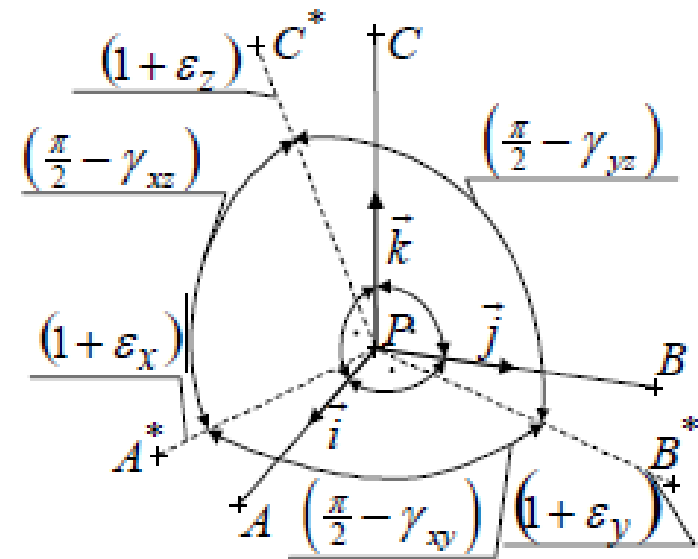
Alakváltozási tenzor



# ELEMI KÖRNYEZET ALAKVÁLTOZÁSA

Terhelés hatására:

- a vektorok egységnyi hossza megváltozik,
- A vektorok által bezárt szög is megváltozik



Megváltozott hosszak:

$$\overline{PA^*} = (1 + \varepsilon_x)$$

$$\overline{PB^*} = (1 + \varepsilon_y),$$

$$\overline{PC^*} = (1 + \varepsilon_z)$$

Megváltozott szögek:

$$(\pi / 2 - \gamma_{xy}) = (\pi / 2 - \gamma_{yx})$$

$$(\pi / 2 - \gamma_{xz}) = (\pi / 2 - \gamma_{zx}),$$

$$(\pi / 2 - \gamma_{yz}) = (\pi / 2 - \gamma_{zy})$$

Az értelmezésből következően:  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$

# ALAKVÁLTOZÁSI JELLEMZŐK

## Fajlagos nyúlások

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{PA^*} - \overline{PA}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA^*} - 1}{1} \Rightarrow \overline{PA^*} = 1 + \varepsilon_x,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\overline{PB^*} - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB^*} - 1}{1} \Rightarrow \overline{PB^*} = 1 + \varepsilon_y,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\overline{PC^*} - \overline{PC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PC^*} - 1}{1} \Rightarrow \overline{PC^*} = 1 + \varepsilon_z.$$

Mértékegysége: [m/m]=[mm/mm]=[1]

**Fajlagos szögtorzulások**  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$

Mértékegysége: [1]



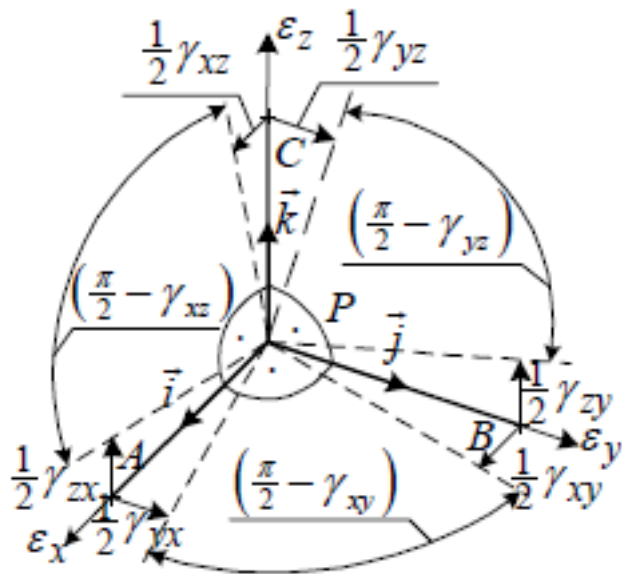


# ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR

## $\alpha$ vektor előállítás:

- a szögelfordulások megfelelése
- és a P ponttól egységnyi távolságra lévő pontokhoz kötése (kiterjesztés)

$\alpha$  vektor felírható minden tengelyre, így megkapjuk az adott tengelyhez kapcsolódó általánosított vektorokat:



$$\vec{\alpha}_x = (\epsilon_x \vec{i} + \frac{1}{2} \gamma_{yx} \vec{j} + \frac{1}{2} \gamma_{zx} \vec{k}),$$

$$\vec{\alpha}_y = (\frac{1}{2} \gamma_{xy} \vec{i} + \epsilon_y \vec{j} + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \vec{k}),$$

$$\vec{\alpha}_z = (\frac{1}{2} \gamma_{xz} \vec{i} + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \vec{j} + \epsilon_z \vec{k}).$$

# ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR

- Kijelenthető, hogy a három tengelyre felírt vektorok egyértelműen jellemzik és meghatározzák P pont elemi környezetét jellemzi.
- az egyértelmű megadáshoz a vektorokat az egységvektorokhoz (i, j, k) kell rendelni.
- Így felírható a P pont elemi környezetének alakváltozási állapota tenzor formában az alábbi alakokkal:

diadikus alakja:  $\underline{\underline{A}}_P = (\vec{\alpha}_x \circ \vec{i} + \vec{\alpha}_y \circ \vec{j} + \vec{\alpha}_z \circ \vec{k}),$

mártixa:  $\left[ \underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$

# ELEMI KÖRNYEZET FESZÜLTSGI ÁLLAPOTA

## Feszültségvektor:

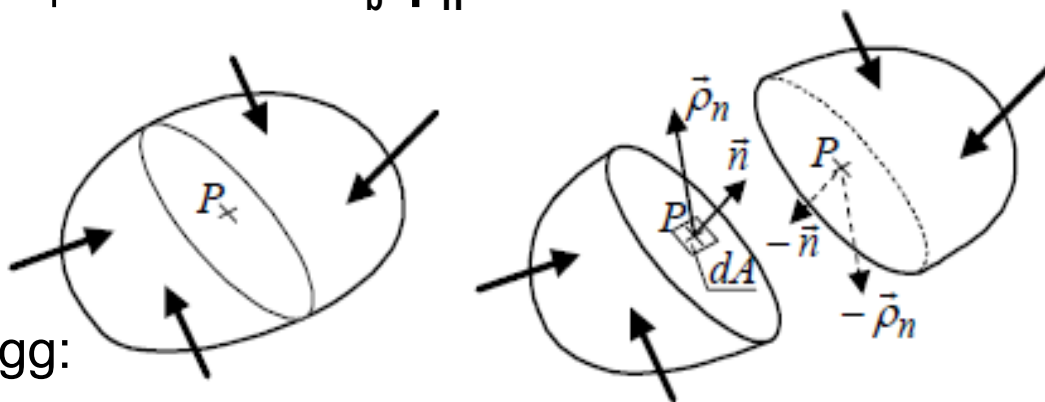
- a metszet felületen ébredő erőrendszer sűrűségvektorát nevezzük feszültségvektornak.
- Jele:  $\rho_n$
- $\mathbf{n}$ : metsződő felületen, a testből kifelé mutató normális vektor.
- $dA$ : az egységnyi felületen fellépő belső erő:  $d\mathbf{F}_b = \rho_n dA$

- mértékegysége:

$$\frac{MN}{m^2} = \frac{N}{mm^2} = MPa$$

- értéke két tényezőtől függ:

- a P ponton átmenő metszet felület normális vektorától ( $\mathbf{n}$ )
- a P pont helyének megválasztásától



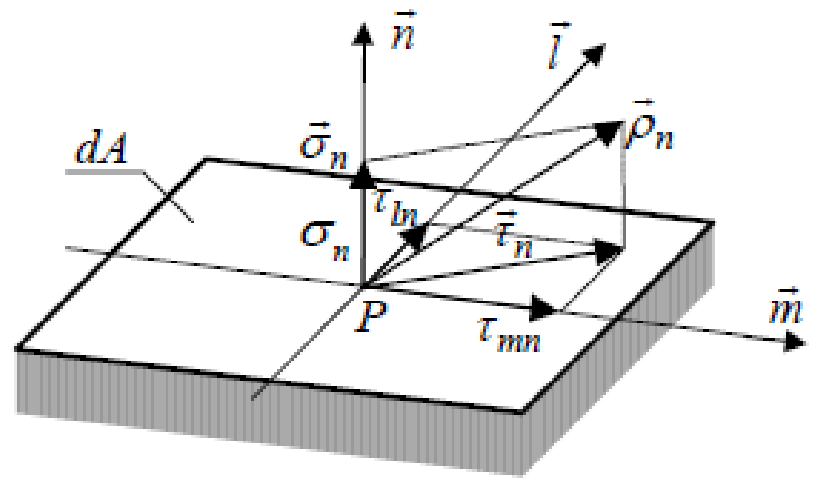
# A NORMÁLIS VEKTOR ÖSSZETEVŐI

Normális feszültségvektor

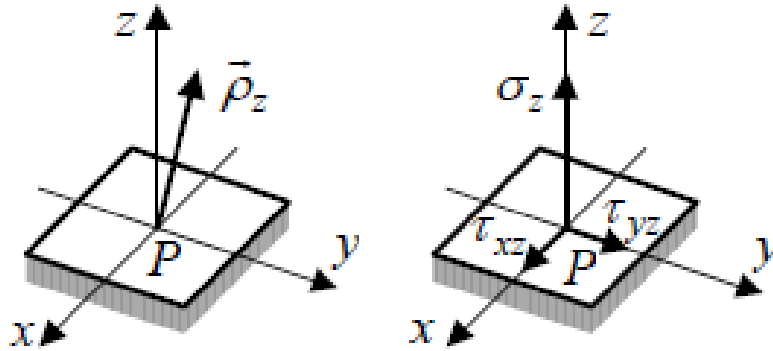
$$\vec{\sigma} = (\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n) \vec{n} = \sigma_n \vec{n}$$

Csúsztató feszültségvektor

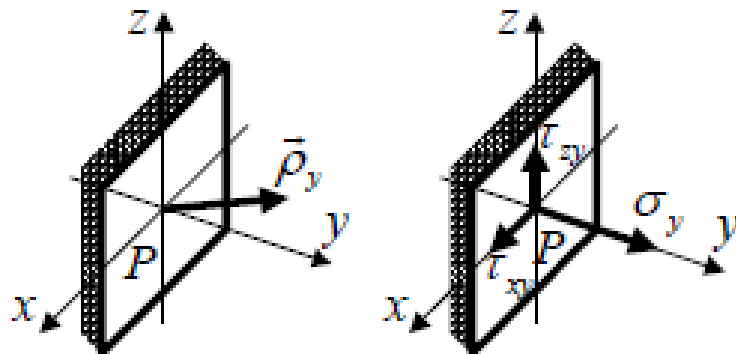
$$\vec{\tau} = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n}$$



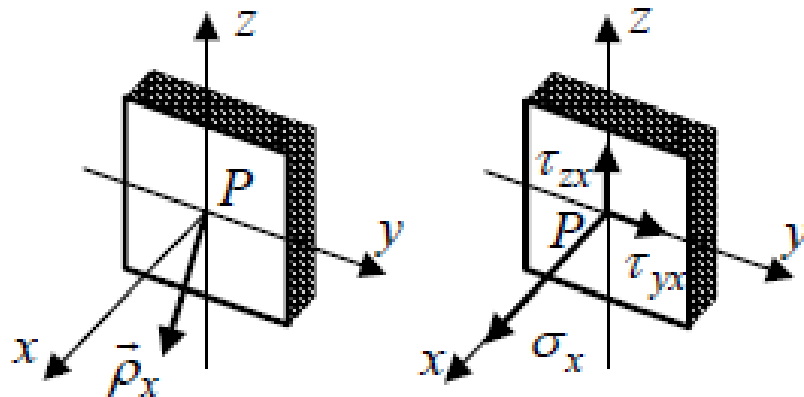
# NEVEZETES FESZÜLTSGVEKTOROK



$$\vec{p}_z = \tau_{xz}\vec{i} + \tau_{yz}\vec{j} + \sigma_z\vec{k}$$



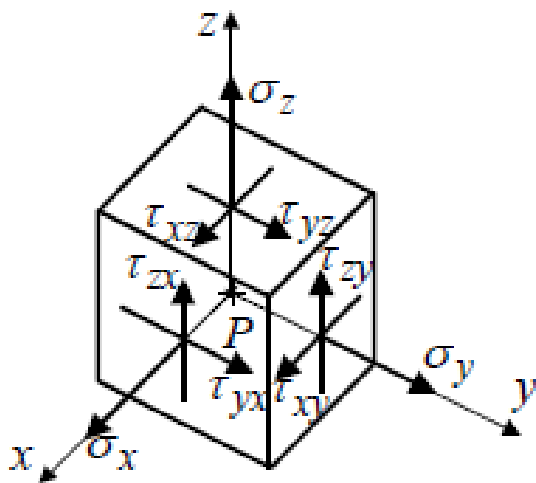
$$\vec{p}_y = \tau_{xy}\vec{i} + \sigma_y\vec{j} + \tau_{zy}\vec{k}$$



$$\vec{p}_x = \sigma_x\vec{i} + \tau_{yx}\vec{j} + \tau_{zx}\vec{k}$$

# NEVEZETES FESZÜLTSGVEKTOROK

- Egy kocka oldalára illesztve jellemzik a kocka középpontjának feszültségi helyzetét.
- az egyértelmű megadáshoz a vektorokat az egységvektorokhoz kell rendelni
- így kapjuk meg az  $\underline{\underline{F}}_P$  feszültségi tenzort P pont elemi környezetére

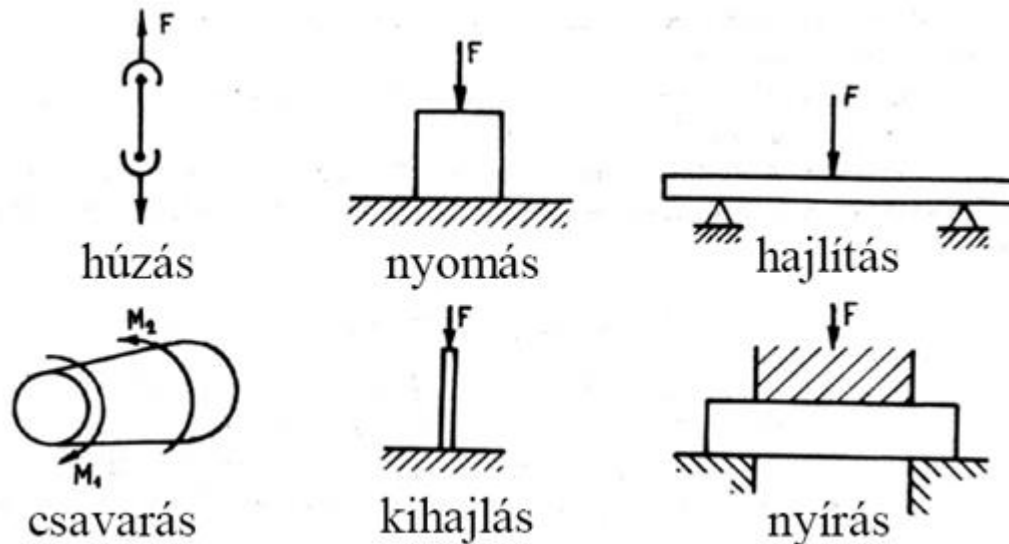


diadikus alakja:  $\underline{\underline{F}}_P = (\vec{\rho}_x \circ \vec{i} + \vec{\rho}_y \circ \vec{j} + \vec{\rho}_z \circ \vec{k})$ ,

mátrixa: 
$$\left[ \underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

# EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEK

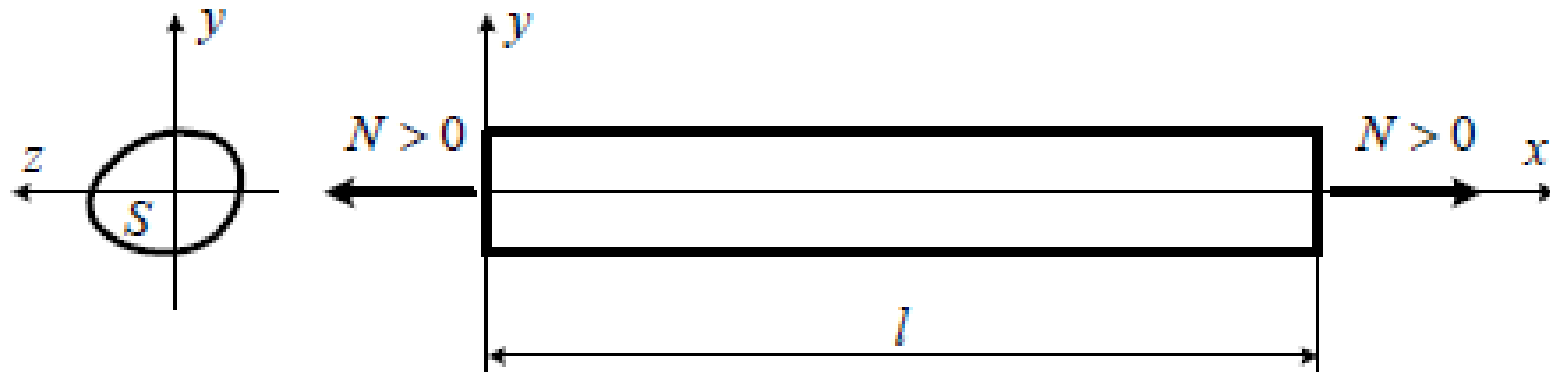
- Egytengelyű igénybevételek
- Prizmatikus rúd: olyan rúd, amelynek keresztmetszete a tengelye mentén állandó
- Igénybevétel: a rúd keresztmetszetén megoszló belső erőrendszernek a keresztmetszet  $S$  súlypontjába redukált vektorkettőse, illetve ennek a vektorkettősnek a skaláris koordinátái



# TISZTA HÚZÁS-NYOMÁS

$N > 0$  húzás

$N < 0$  nyomás





# ÁLLAPOTOK

$$F = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

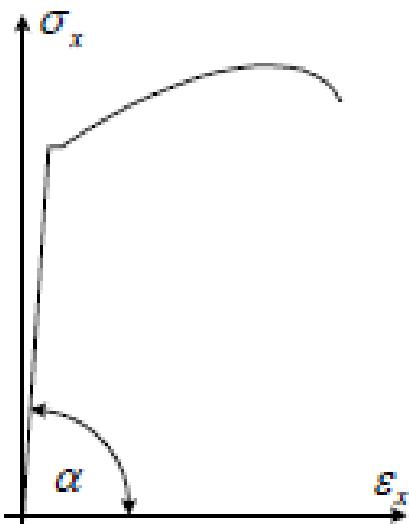
$$\varepsilon_x = \frac{l' - l}{l}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

**Egyszerű Hooke-törvény**

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

# SZAKÍTÓDIAGRAM (KITEKINTÉS)



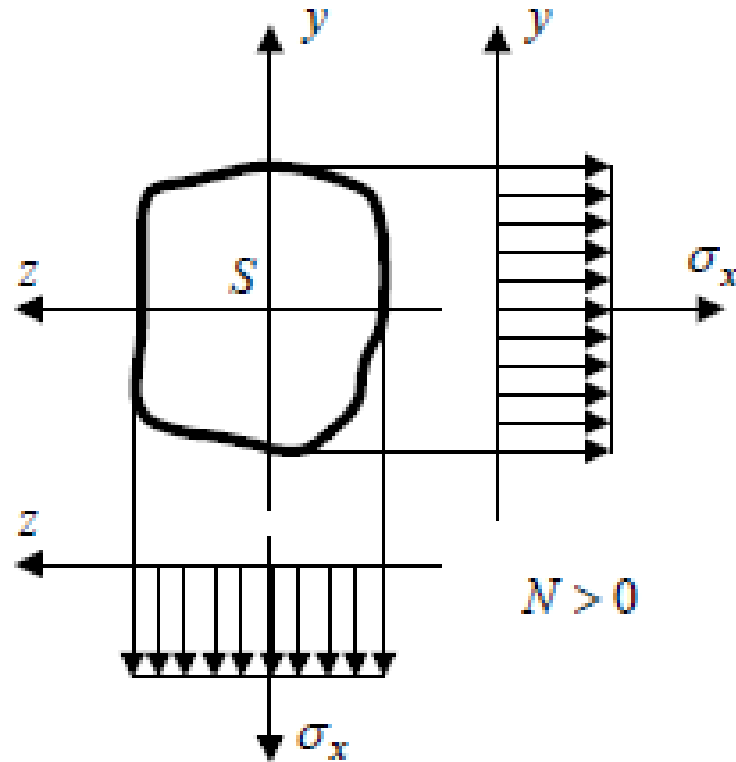
$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Az  $E$  rugalmassági modulus a szakító diagram egyenes szakaszának irány-tangense.

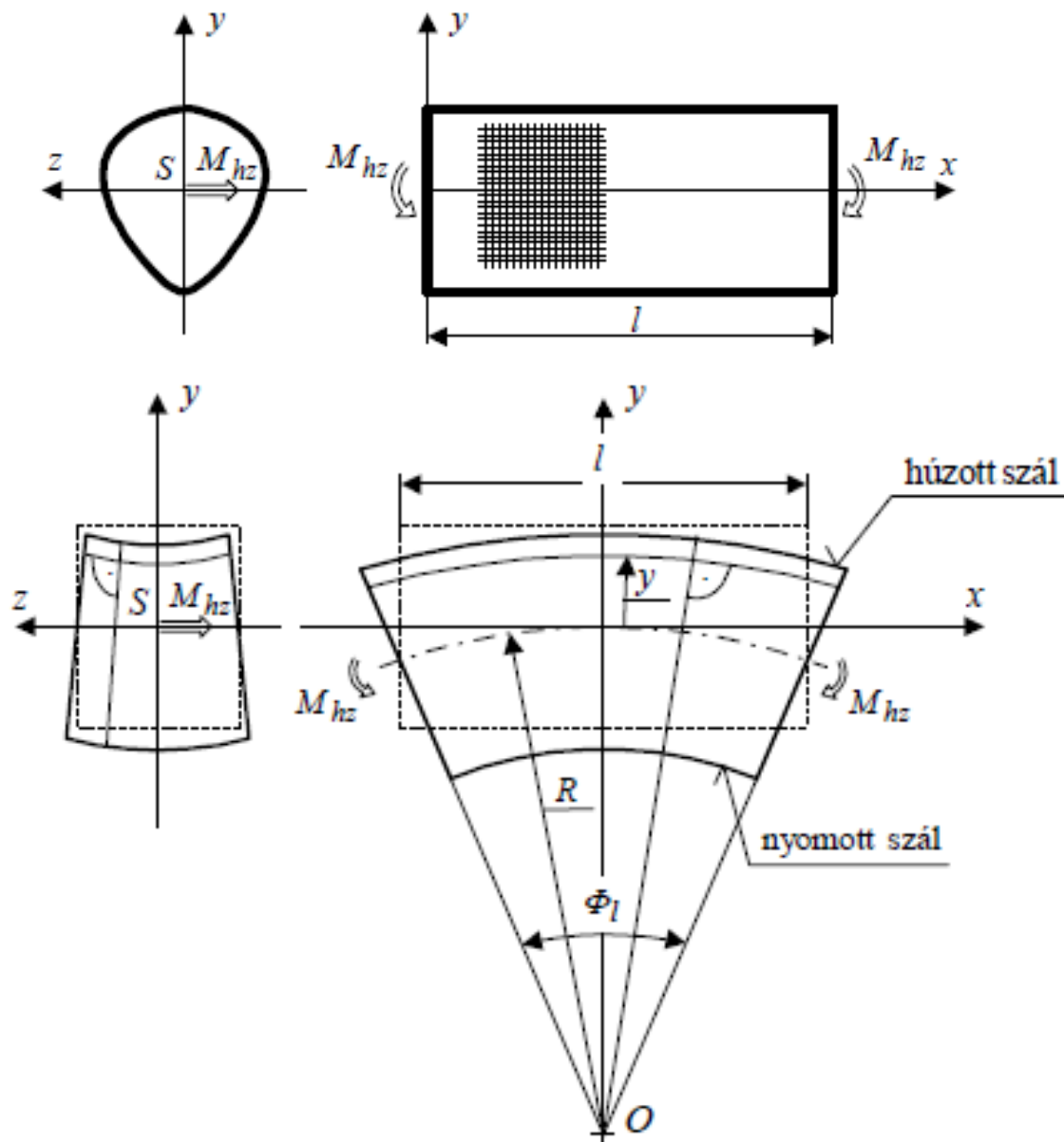
$$\nu = \frac{|\varepsilon_k|}{|\varepsilon_h|} .$$

A  $\nu$  Poisson tényező a keresztirányú és a hosszirányú fajlagos nyúlás hányadosa.

# FESZÜLTÉSGELOSZLÁS



# TISZTA HAJLÍTÁS



# ÁLLAPOTOK

$$F = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y$$

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{l' - l}{l} = \frac{y}{R} = \kappa y \neq \text{áll}$$

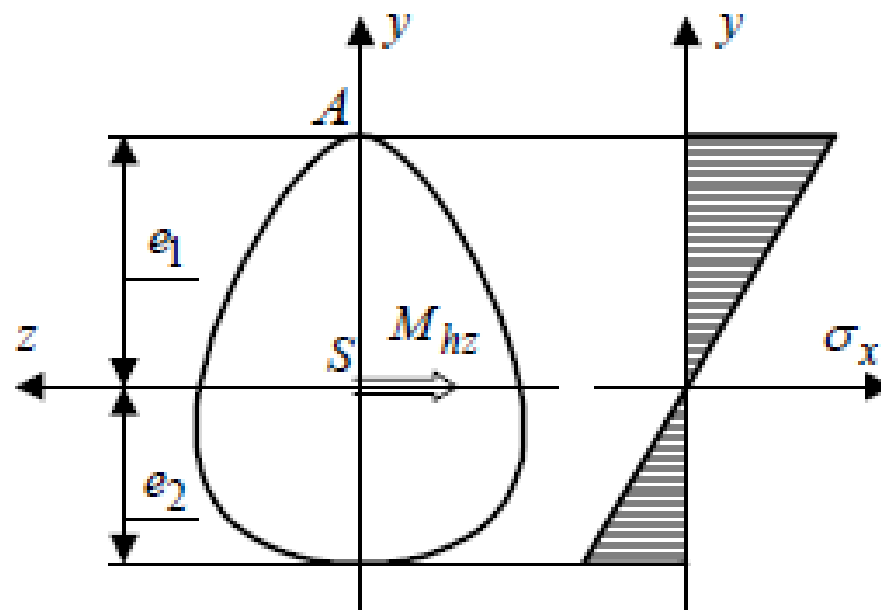
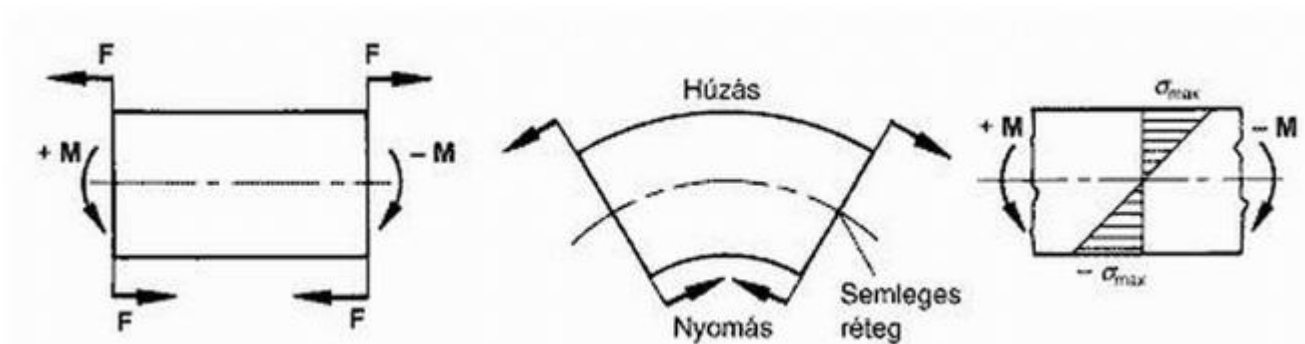
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

$\kappa$ : görbület

**Egyszerű Hooke-törvény**

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

# FESZÜLTSGELOSZLÁS

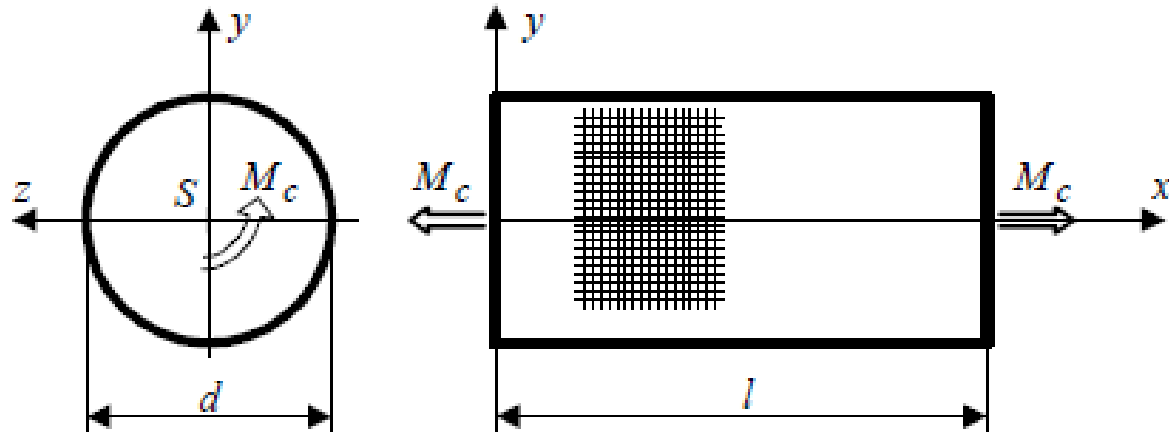


# MÁSODRENDŰ NYOMATÉK

A másodrendű nyomaték a síkidom jellemzője, melyet az ilyen keresztmetszetű rúd hajlítással szembeni ellenállásának és lehajlásának számítására használnak.

$$\left[ \underline{I}_s \right] = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

# TISZTA CSAVARÁS





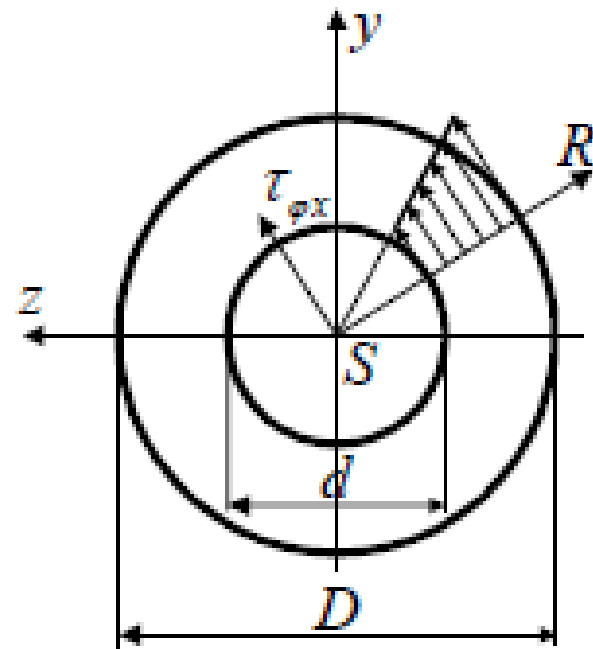
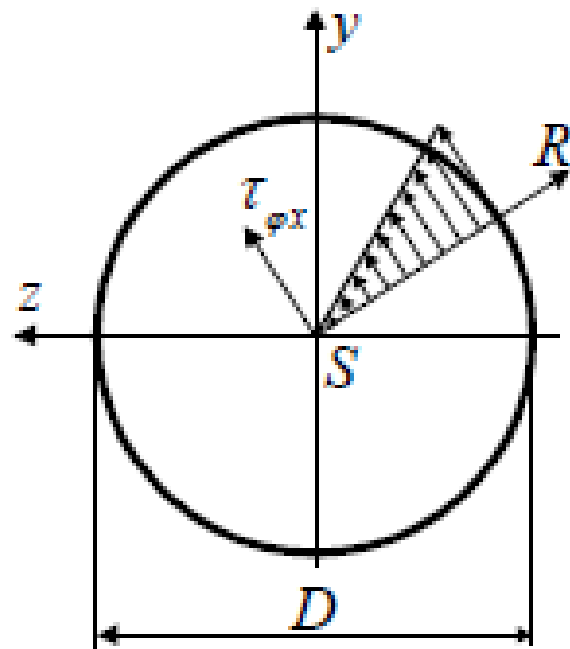
# ÁLLAPOTOK

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ (R\varphi x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi x} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{x\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_{\varphi x} = \gamma_{x\varphi} = \mathcal{G}R.$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ (R\varphi x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi x} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = G\mathcal{G}R.$$

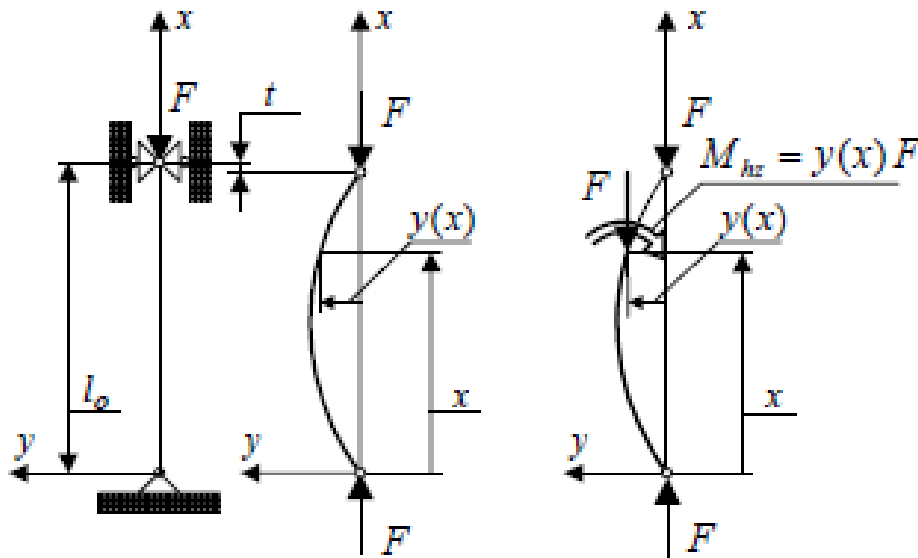
$$\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = \underline{\underline{G\mathcal{G}}}R = \frac{M_c}{I_p}R.$$

# FESZÜLTÉGÁLLAPOT



# KIHAJLÁS

- Karcsú rudak esetén
- Nyomás esetén léphet fel
- idealizálás: centrikus nyomás
- kritikus erőértéknél a rúd meggörbül, hirtelen nagy elmozdulások lépnek fel
- Euler féle differenciál-egyenlet:

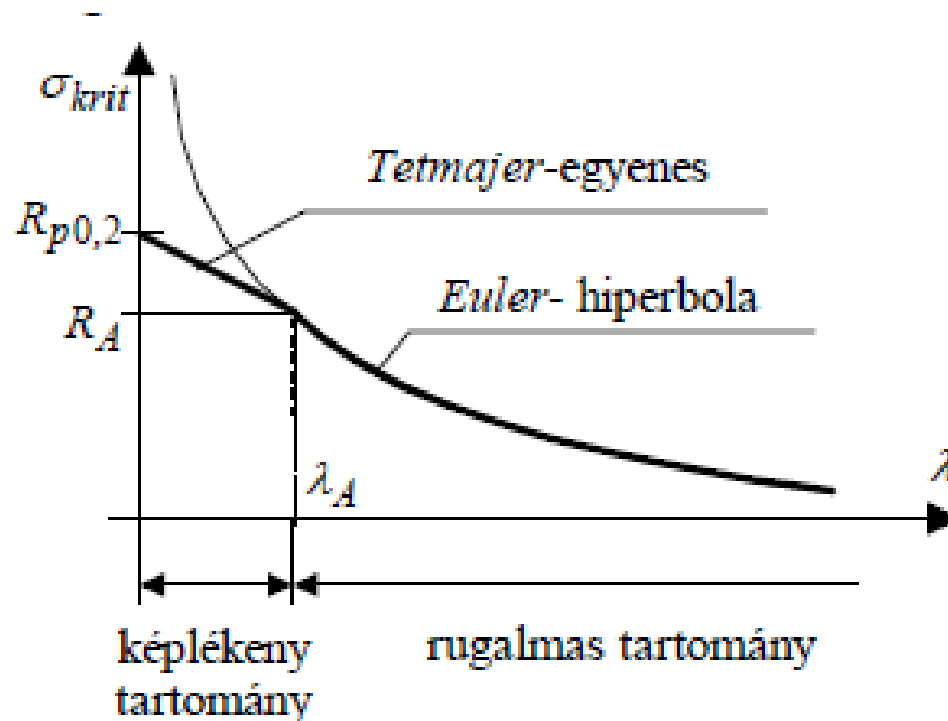


$$y'''' = \frac{d^2 y(x)}{d x^2} = -\frac{M_{bz}(x)}{E I_z} = -\frac{F}{E I_z} y(x)$$

$$F_{krit} = F_{krit \min} = \pi^2 \frac{E I_{\min}}{l_0^2} = \pi^2 \frac{E I_2}{l_0^2}$$

# HATÁRGÖRBE

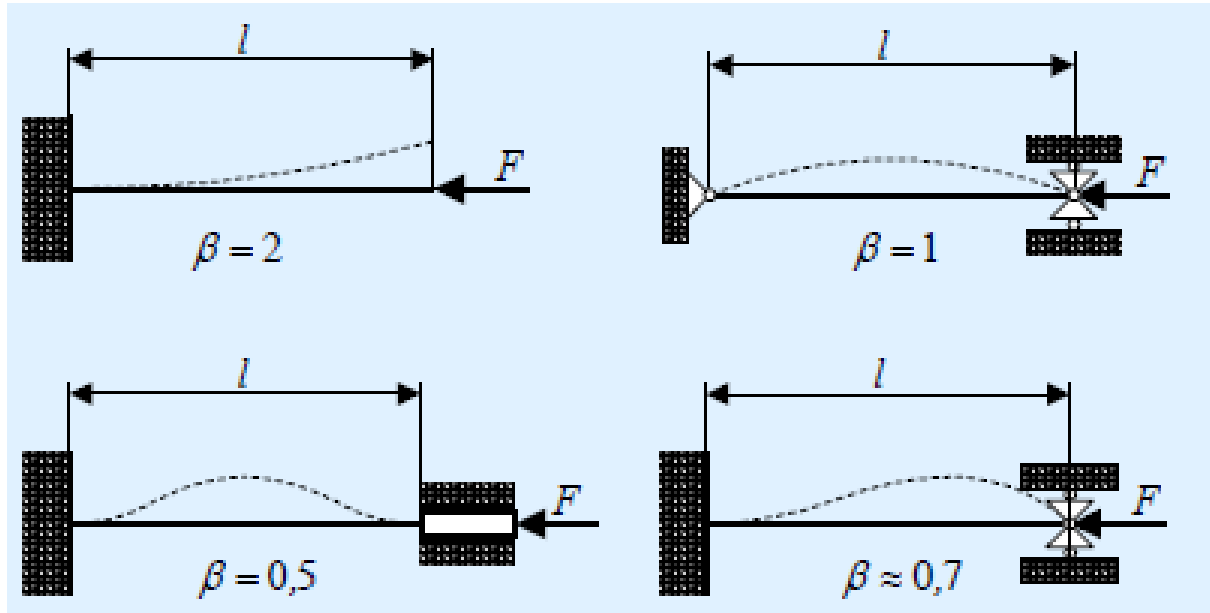
$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = l_0 \sqrt{\frac{A}{I_{\min}}}$$



$$\text{Euler-féle hiperbola: } \sigma_{krit} = \sigma_{krit}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

$$\text{Tetmajer-féle egyenes: } \sigma_{krit} = \sigma_{krit}(\lambda) = -\frac{R_{p0,2} - R_A}{\lambda_A} \lambda + R_{p0,2}$$

# KIHAJLÁSI FÉLHULLÁMHOSSZ



$$l_0 = \beta l.$$

# MÉRETEZÉSI, ELLENŐRZÉSI FELTÉTELEK

Egytengelyű feszültségi állapot

$$\sigma_x \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$$

*n*: előírt biztonsági tényező

- értéke 1,5 ... 3

# MÉRETEZÉSI, ELLENŐRZÉSI FELTÉTELEK

Általános feszültségi állapot

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$$

Redukált feszültség meghatározása → visszavezetés egytengelyű problémára

# REDUKÁLT FESZÜLTSG

– *Coulomb* elmélet:

Tönkremenetel az anyag egy pontjában akkor következik be, ha ott a legnagyobb normálfeszültség eléri a szakító, vagy a nyomó szilárdság értékét.

A *Coulomb* elmélet rideg anyagok esetén adja meg jól a tönkremenetel bekövetkezését abban az esetben, ha van egy domináns főfeszültség, amihez képest a másik két főfeszültség kicsi.

– A *Coulomb*-féle redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Coulomb) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|).$$



# REDUKÁLT FESZÜLTSG

– *Mohr* elmélet:

Két általános térbeli feszültségállapot tönkremenetel szempontjából akkor azonosan veszélyes, ha a hozzájuk tartozó legnagyobb *Mohr*-kör átmérője megegyező.

A *Mohr* elmélet alakítható anyagok esetén adja meg jól a tönkremenetel bekövetkezését.

– *Mohr*-féle redukált feszültség:  $\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3$ .

# REDUKÁLT FESZÜLTÉSÉG

– *Huber-Mises-Hencky (HMH)* elmélet:

Két feszültségi állapot tönkremenetel szempontjából akkor azonosan veszélyes, ha torzulási alakváltozási energiájuk megegyezik. A *HMH* elmélet alakítható anyagok esetén adja meg jól a tönkremenetel bekövetkezését. A *Mohr* és a *HMH* elmélet szerint számított redukált feszültség csak kis mértékben tér el egymástól.

Általában  $\sigma_{red}(HMH) \leq \sigma_{red}(Mohr)$ .

– *Huber-Mises-Hencky* féle redukált feszültség

A redukált feszültség arányos az  $u_T$  torzulási energiával.

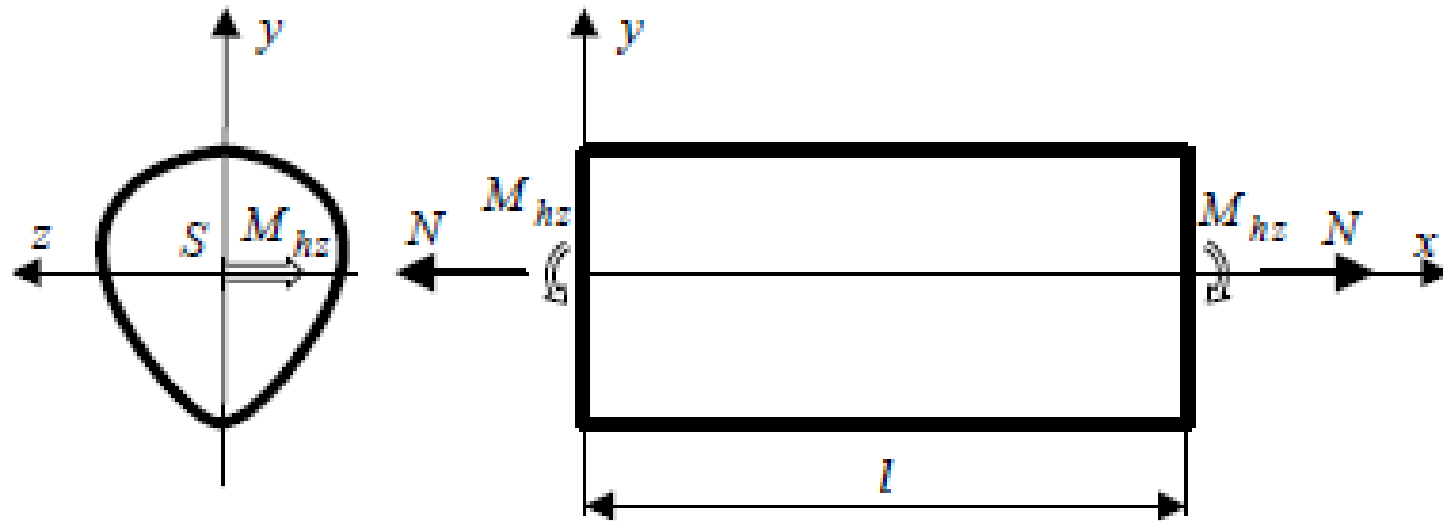
Az  $x, y, z$  koordináta-rendszerben vett feszültségi koordinátákkal:

$$\begin{aligned}\sigma_{red}(HMH) &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]}.\end{aligned}$$

# MÉRETEZÉS ALAPEGYENLETE

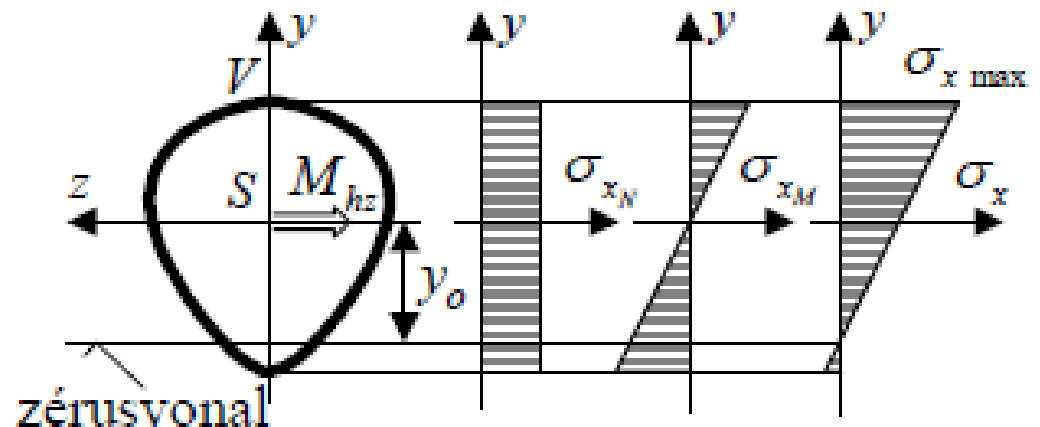
$$\sigma_{red} \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$$

# HÚZÁS-NYOMÁS ÉS EGYENES HAJLÍTÁS



Az ábrán az  $N > 0$ ,  $M_{hz} > 0$  eset látható.

$$\sigma_x = \sigma_{x_N} + \sigma_{x_M} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y$$

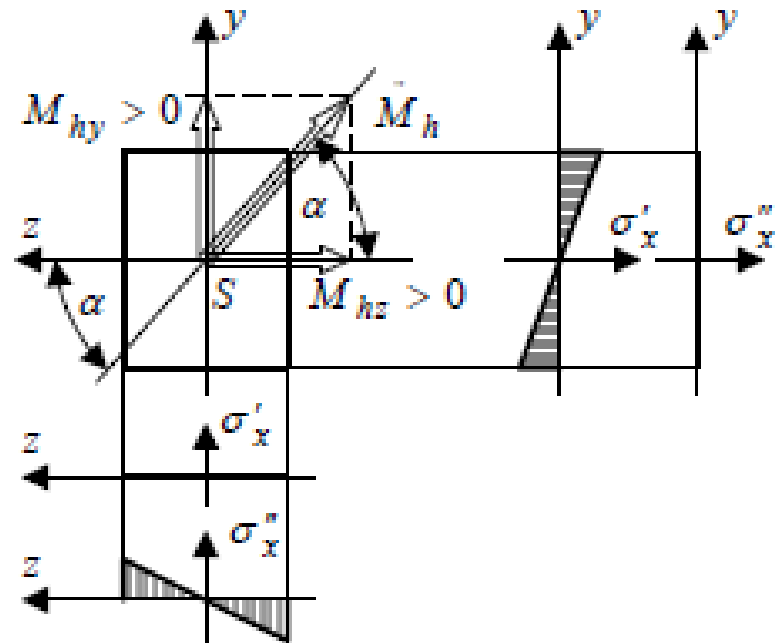


# FERDE HAJLÍTÁS

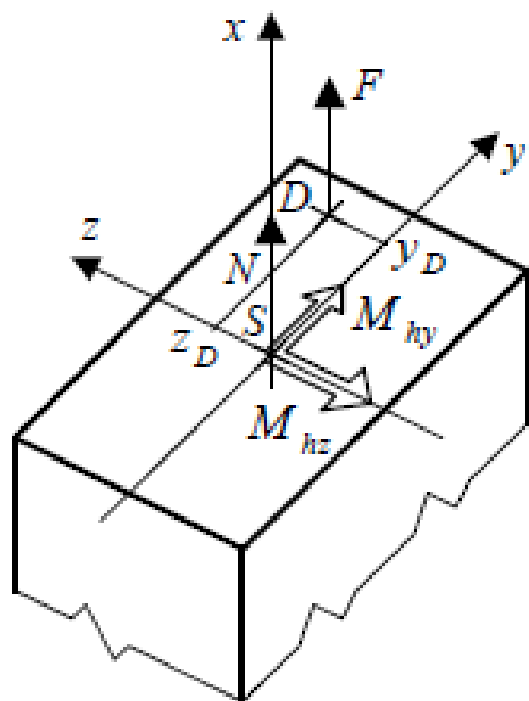
$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z .$$

Feszültségeloszlás:



# EXCENTRIKUS HÚZÁS-NYOMÁS



Az  $\vec{F}$  erőt redukáljuk a kereszt-metszet  $S$  pontjába.

⇓

húzás + ferde hajlítás.

⇓

ferde hajlítás  $\equiv$  két egyenes hajlítás.

A rúd igénybevételei:

$$\left. \begin{aligned} N &= F \\ M_{hz} &= F y_D \\ M_{hy} &= F z_D \end{aligned} \right\} .$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

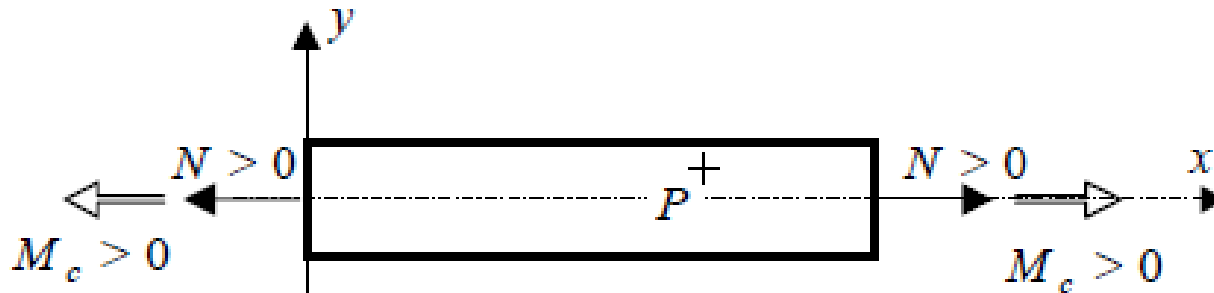
$$\sigma_x = \sigma_{x_N} + \sigma_{x_M} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z.$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{y_D}{i_z^2} y + \frac{z_D}{i_y^2} z \right).$$

Húzás esetén:  $N > 0$ .

Nyomás esetén:  $N < 0$ .

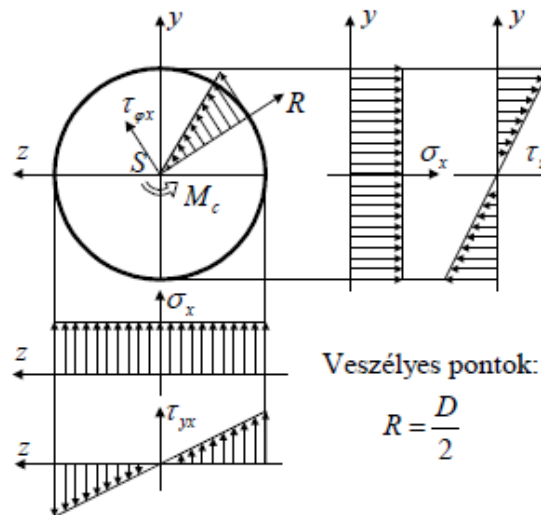
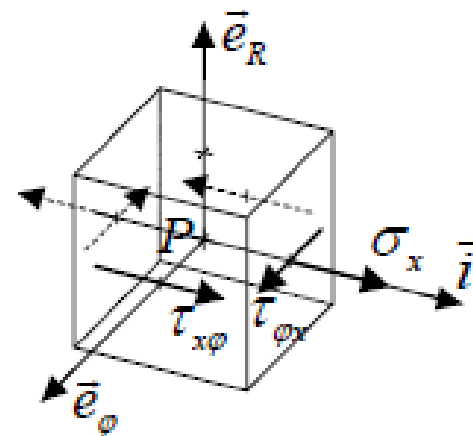
# HÚZÁS-NYOMÁS ÉS CSAVARÁS



Feszültségi állapot a  $P$  pontban:

$$\underline{\underline{[F]}}_{(R\varphi x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi x} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & \sigma_x \end{bmatrix}$$

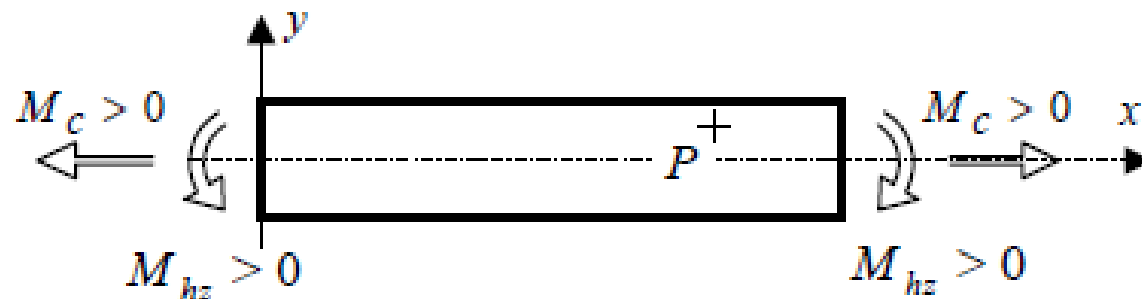
$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad \tau_{x\varphi} = \frac{M_c}{I_p} R.$$



Veszélyes pontok:

$$R = \frac{D}{2}$$

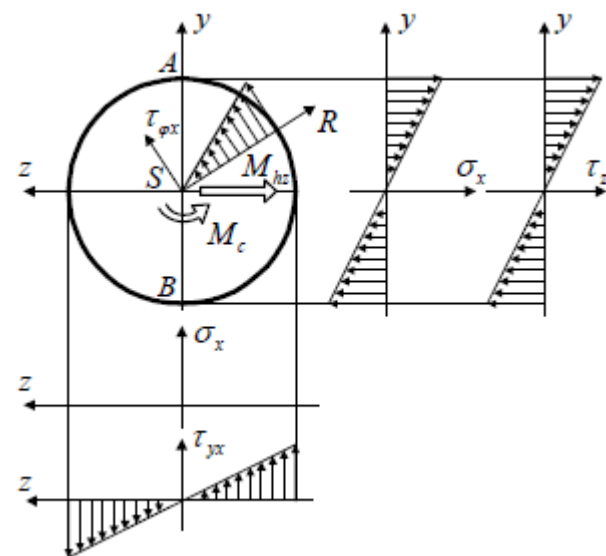
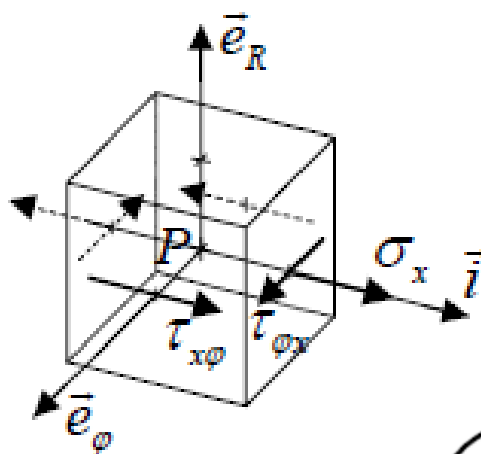
# HAJLÍTÁS ÉS CSAVARÁS



Feszültségi állapot a  $P$  pontban:

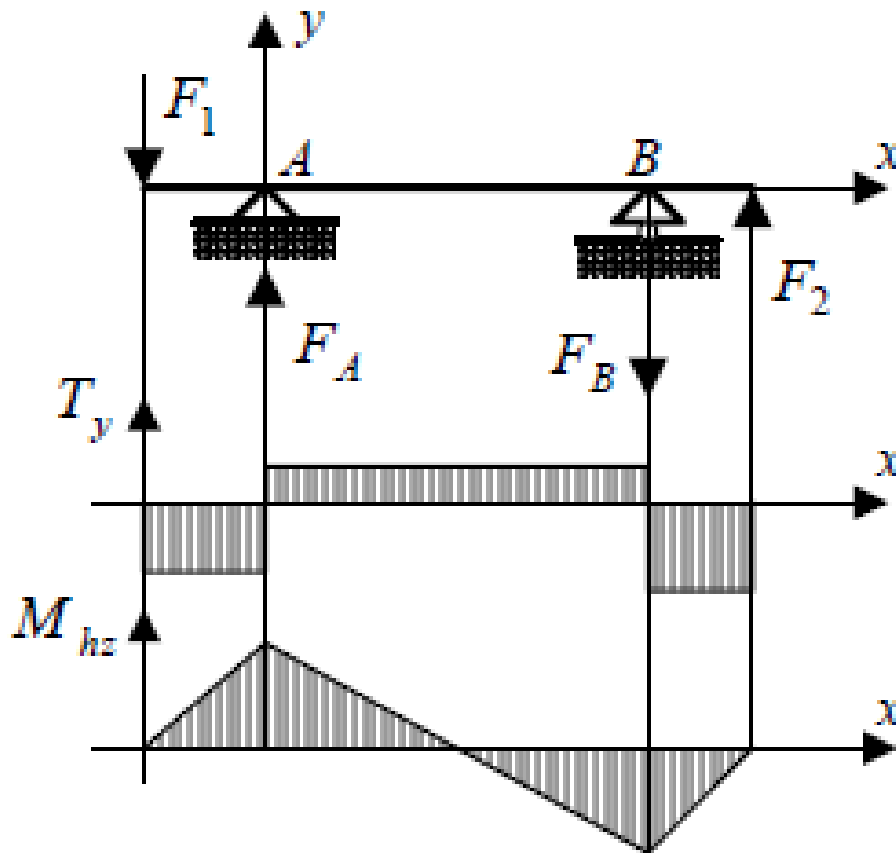
$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ (R\varphi x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi x} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & \sigma_x \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y, \quad \tau_{\varphi x} = \frac{M_c}{I_p} R$$





# NYÍRÁS ÉS HAJLÍTÁS



$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# BETTI TÉTEL

- rúdszerkezetek igénybevétele esetén alkalmazandó

**A Betti-tétel az ún. idegen munkák egyenlőségét mondja ki:  $W_{12}=W_{21}$ .**

- Ez a következőt jelenti: a szerkezetre két különböző - egy 1-es és egy 2-es -, külön-külön egyensúlyi erőrendszert működtetünk, különböző sorrendben felvive. A már fent lévő 1-es erőrendszer munkát végez akkor, amikor a 2-es erőrendszer hatására a szerkezet további alakváltozást szenved - ez az 1-es erőrendszer munkája a 2-es okozta alakváltozás során ( $W_{12}$ ). Fordított sorrendben felvive az erőrendszereket, a 2-es végez munkát az 1-es okozta alakváltozás során ( $W_{21}$ ). A tétel szerint a 2-es erőrendszer munkája az 1-es okozta elmozdulásokon ugyanannyi, mint az 1-es erőrendszer munkája a 2-es okozta elmozdulásokon.
- A Betti-tétel más megfogalmazásban úgy is kifejezhető, hogy az első erőrendszer után a másodikat is felvive  $U_{12}$  értékkel növeli meg a rendszer belső energiáját. Ha azonban az erőket fordított sorrendben visszük fel, és  $U_{21}$  belső energia-növekmény jön létre, akkor  $U_{12} = U_{21}$ , tehát azonos belső energia növekményhez jutunk.

# CASTIGLIANO-TÉTEL

- az alakváltozási energiának a szerkezetet terhelő valamely koncentrált erő szerinti parciális deriváltja megadja az erő támadáspontjának az erő irányába eső elmozdulását. Rúdszerkezetek esetén ez általánosítható erőpárokra is; az alakváltozási energiának a szerkezetet terhelő valamely koncentrált erőpár szerinti parciális deriváltja megadja a keresztmetszet erőpár tengelye körüli szögelfordulását.