MOZGÁSTAN

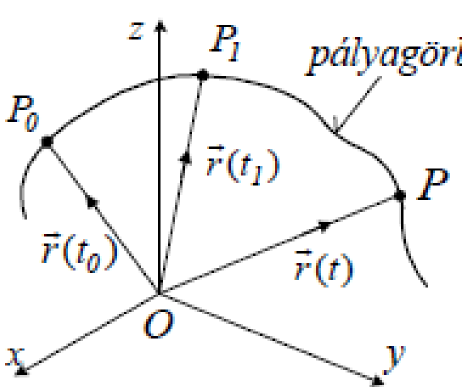
ÁTTEKINTÉS

ALAPFOGALMAK

- **Mozgástan**
  - Kinematika (mozgások leírása) / hogyan mozog?
  - Kinetika (a mozgások okainak leírása) / miért mozog?
- **Vonatkoztatási rendszer**
  - valamely testhez kötött rendszer, amelyben a mozgást vizsgáljuk, amelyhez képest a mozgást leírjuk
  - gyakran használt
    - DDKR
    - HKR
- **Szabadságfok**
  - a test térbeli vagy síkbeli helyzetét egyértelműen meghatározó, egymástól lineárisan független skaláris koordináták, skaláris paraméterek száma

TÖMEGPONT KINEMATIKÁJA

- **Mozgásfüggvény**
  - az anyagi pont helyzetét meghatározó helyvektor-idő függvény
  - mértékegysége (SI): m
- **Pályagörbe**
  - az a térgörbe, amelyen az anyagi pont a mozgás során végighalad
  - a helyvektor-idő függvényben lévő vektorok végpontjai írják le



A mozgásfüggvény vektoriális megadása:

DDKR:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,.$$

HKR:

$$\vec{r}(t) = R(t)\vec{e}_R + z(t)\vec{e}_z\,,$$

$$\vec{e}_R = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\,.$$

A mozgásfüggvény skaláris megadása:

DDKR: $x = x(t)\,,\quad y = y(t)\,,\quad z = z(t)\,.$

HKR: $R = R(t)\,,\quad \varphi = \varphi(t)\,,\quad z = z(t)\,.$

SEBESSÉGFÜGGVÉNY

- **A mozgásfüggvény idő szerinti első deriváltja**

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

- **Pillanatnyi sebesség:**
  - egy adott t időpillanatban a sebességfüggvény értéke
  - iránya megegyezik a pályagörbe érintőjének irányával
- **Pályasebesség (pálya menti sebesség):**
  - az ívhossz idő szerinti első deriváltja
  - a sebességvektor érintő irányú koordinátája

<u>A sebességfüggvény koordinátái DDKR-ben:</u>

A mozgásfüggvény (helyvektor): $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

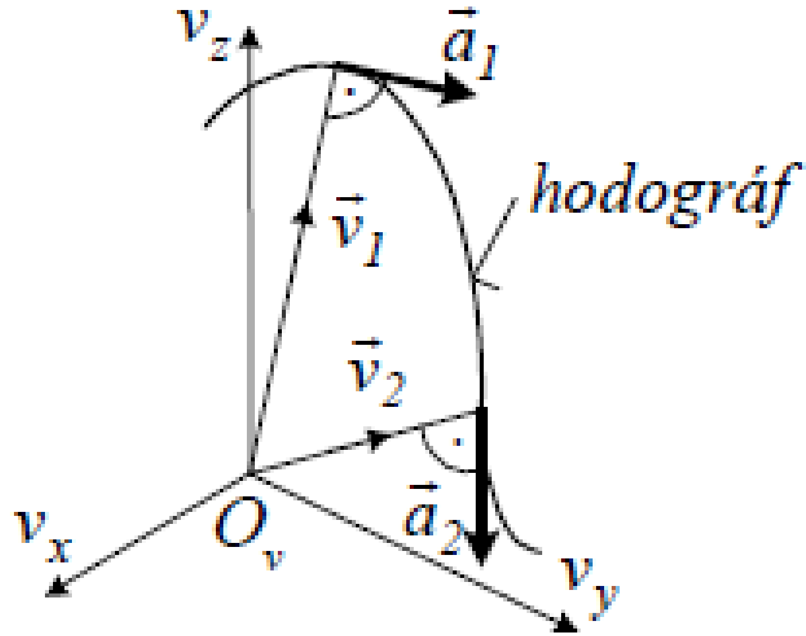
A sebességfüggvény (sebességvektor): $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$.

A sebességvektor koordinátái:

$$v_x(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}\,,\; v_y(t) = \frac{d\,y(t)}{dt}\,, \qquad v_z(t) = \frac{d\,z(t)}{dt}\,.$$

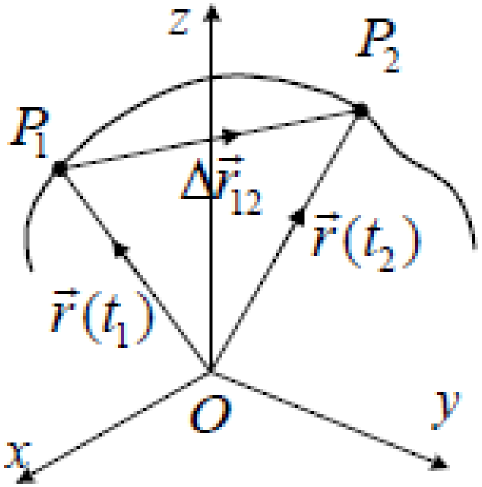
HODOGRÁF

- **A görbe, amely a sebességvektorok végpontjait írja le *a* v_x, v_y, v_z koordináta rendszerben.**
- **A sebességvektorok végpontjai által meghatározott görbe, ha azokat egy közös kezdőpontból írjuk fel.**
- A gyorsulásvektorok a hodorgáf görbe érintői



KÖZEPES SEBESSÉG

- **Megadott időintervallumra értelmezhető**



A $<t_1 t_2>$ időintervallumra vonatkozó közepes sebesség:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}.$$

GYORSULÁSFÜGGVÉNY

- **A sebességfüggvény idő szerinti első deriváltja, illetve a mozgásfüggvény második deriváltja.**
- **Mértékegysége m/s^2**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

- **Pillanatnyi gyorsulás**
  - adott t időpillanatban a gyorsulásfüggvény értéke
  - vektormennyiség
  - a pályagörbe simulósíkjába esik
- **Pálya menti gyorsulás**
  - a sebesesség nagyságának megváltozásából adódik
- **Normális gyorsulás**
  - a sebesség irányának megváltozásából adódik

MOZGÁSJELLEMZŐK KÖZÖTTI KAPCSOLAT

- *Ismert:* $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Meghatározandó: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = v(t)\vec{e}$,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = a_e(t)\vec{e} + a_n(t)\vec{n}.$$

- *Ismert:* $\vec{a} = \vec{a}(t)$ és a $\vec{v}(t = t_0) = \vec{v}_0$, $\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0$ kezdeti feltételek.

Meghatározandó: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt$,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int^{t} \vec{v}(t)dt.$$

- *Ismert:* $\vec{v} = \vec{v}(t)$ és az $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ kezdeti feltétel.

Meghatározandó: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = a_e(t)\vec{e} + a_n(t)\vec{n}$,

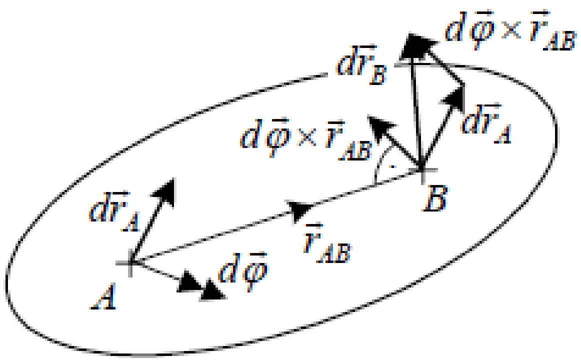
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt.$$

MEREV TEST MOZGÁSA

- **Sebességállapot:**
  - A testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli sebességeinek összessége.
- **Gyorsulásállapot:**
  - A testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli gyorsulásainak összessége.
- **Merev test síkmozgása:**
  - A test pontjai egy adott alapsíkkal párhuzamos síkokban mozognak.
- **Merev test haladó mozgása:**
  - A test önmagával párhuzamosan mozdul el. A test minden pontjának azonos az elmozdulása.
- **Merev test forgómozgása:**
  - A test pontjai a test két nyugalomban lévő pontját összekötő tengely, a forgástengely körül koncentrikus köríveken mozdulnak el.
- **Merev test elemi mozgása:**
  - A test végtelenül rövid idő alatt bekövetkező (egy időpillanatban történő) mozgása.

SEBESSÉGÁLLAPOT

- **A merev test bármely sebességállapota egyértelműen megadható a sebesség, szögsebesség redukált vektorkettőssel.**
- **A szögsebesség a szögelfordulás függvény idő szerinti első deriváltja**



A merev test végtelenül kis elmozdulását vizsgáljuk:

- párhuzamos eltolás: $d\vec{r}_A$,
- szögelfordulás: $d\vec{\varphi}$ (az elmozdulásoktól kettős nyíllal különböztetjük meg).

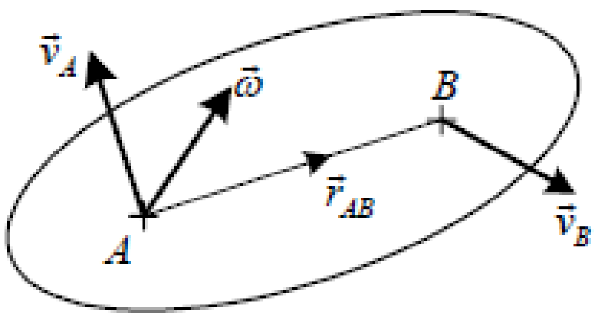
A B pont elmozdulása: eltolás + szögelfordulás.

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{\varphi}\times\vec{r}_{AB}.$$

$d\vec{\varphi}$ az egész merev testre jellemző mennyiség.

Vegyük az összefüggés idő szerinti első deriváltját: $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt}=\dfrac{d\vec{r}_A}{dt}+\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}\times\vec{r}_{AB}$.

SEBESSÉGÁLLAPOT

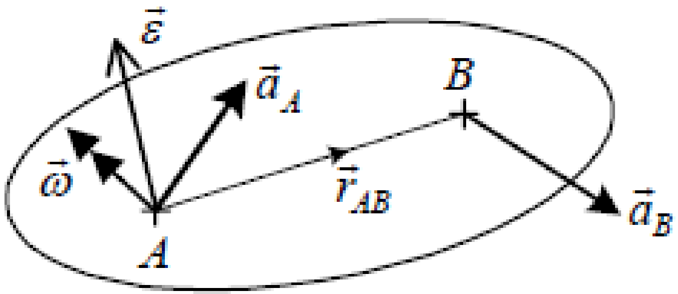


Az új jelölés figyelembevételével: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$.

Analógia (Statikából): $\vec{M}_B = \vec{M}_B + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}$.

Az $\vec{v}_A, \vec{\omega}$ ismeretében a merev test bármely pontjának sebessége meghatározható.

GYORSULÁSÁLLAPOT



$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ - a merev test szöggyorsulása.

Az $\vec{\varepsilon}$ az egész merev testre jellemző mennyiség.

Mértékegysége: rad/s^2 .

A merev test tetszőleges *B* pontjának gyorsulása: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \right)$.

Tétel: a merev test gyorsulásállapota az $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ és az $\vec{\varepsilon}$ mennyiségekkel adható meg egyértelműen.

Síkmozgás esetén: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB}$.

Ha *xy* a mozgás síkja: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{e}_z$.

Gyorsuláspólus: a síknak az a Q pontja melynek zérus a gyorsulása $\vec{a}_Q = \vec{0}$.

Gyorsulásábra: egy adott időpillanatban, egy közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak gyorsulásvektorait.

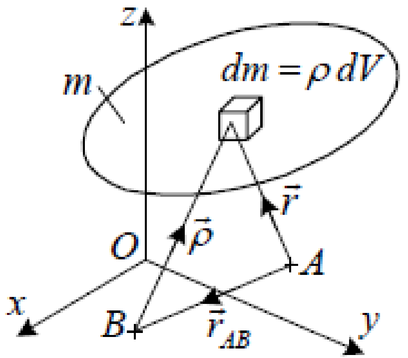
MEREV TEST KINETIKÁJA

- **Tömeg**
  - a merev test haladó mozgással szembeni tehetetlenségét jellemzi

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho\, dV, \quad \text{Mértékegysége: kg.}$$

$$\rho \text{ - tömegsűrűség,} \quad \text{Mértékegysége: } \mathrm{kg/m^3}.$$

- **Statikai nyomaték**



Pontra számított statikai nyomaték:

$$\vec{S}_A = \int_{(m)} \vec{r}\, dm = \int_{(V)} \vec{r}\rho\, dV.$$

Mértékegysége: kgm.

Pontra számított statikai nyomaték átszámítása:

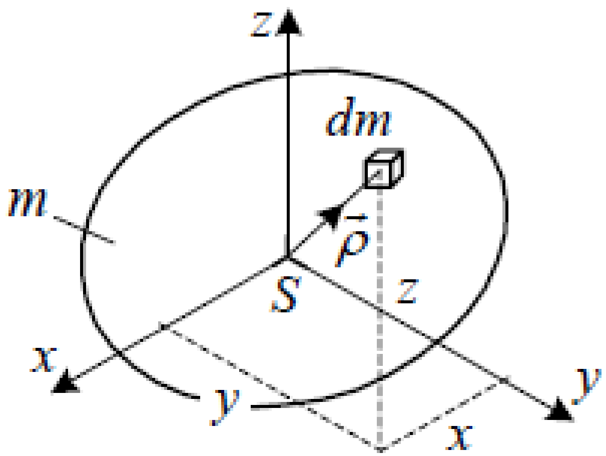
$$\vec{S}_B = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AB}.$$

- **Tömegközéppont, súlypont**
  - a testnek az a T illetve S pontja, amelyre számított statikai nyomatéka zérus

$$\underbrace{\vec{S}_T}_{=\vec{0}} = \vec{S}_A - m\vec{r}_{AT} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{AT} = \frac{\vec{S}_A}{m} = \frac{\int_{(V)} \vec{r}\rho\, dV}{\int_{(V)} \rho\, dV}.$$

TEHETETLENSÉGI NYOMATÉK

- a merev test forgó mozgásával szembeni tehetetlenségét fejezi ki



Az S ponti tehetlenségi tenzor:

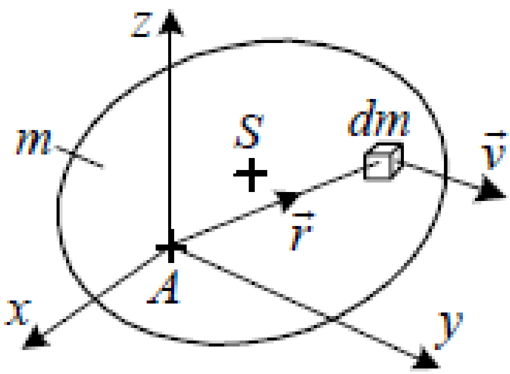
Diadikus előállítása: $\underline{\underline{J}}_S = \int\limits_{(m)} \left[(\vec{\rho})^2 \underline{\underline{E}} - (\vec{\rho} \circ \vec{\rho}) \right] dm$.

$\underline{\underline{E}}$ - egységtenzor.

Mértékegysége: kgm^2 .

Mátrixos előállítása : $\left[\underline{\underline{J}}_S \right] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$ - szimmetrikus tenzor.

IMPULZUS, PERDÜLET



- *Impulzus:*

Értelmezés: $\vec{I} = \int\limits_{(m)} \vec{v}\, dm = \int\limits_{(V)} \vec{v} \rho dV$.

Mértékegysége: $\text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Ns}$.

Kiszámítás: $\vec{I} = m\vec{v}_S$.

Impulzus nyomaték (perdület):

Értelmezés: $\vec{\pi}_A = \int\limits_{(m)} \vec{r} \times \vec{v}\, dm$.

Mértékegység: $\text{kg}\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}} = \underbrace{\text{Ns}}\,\text{m}$.

Kiszámítás:

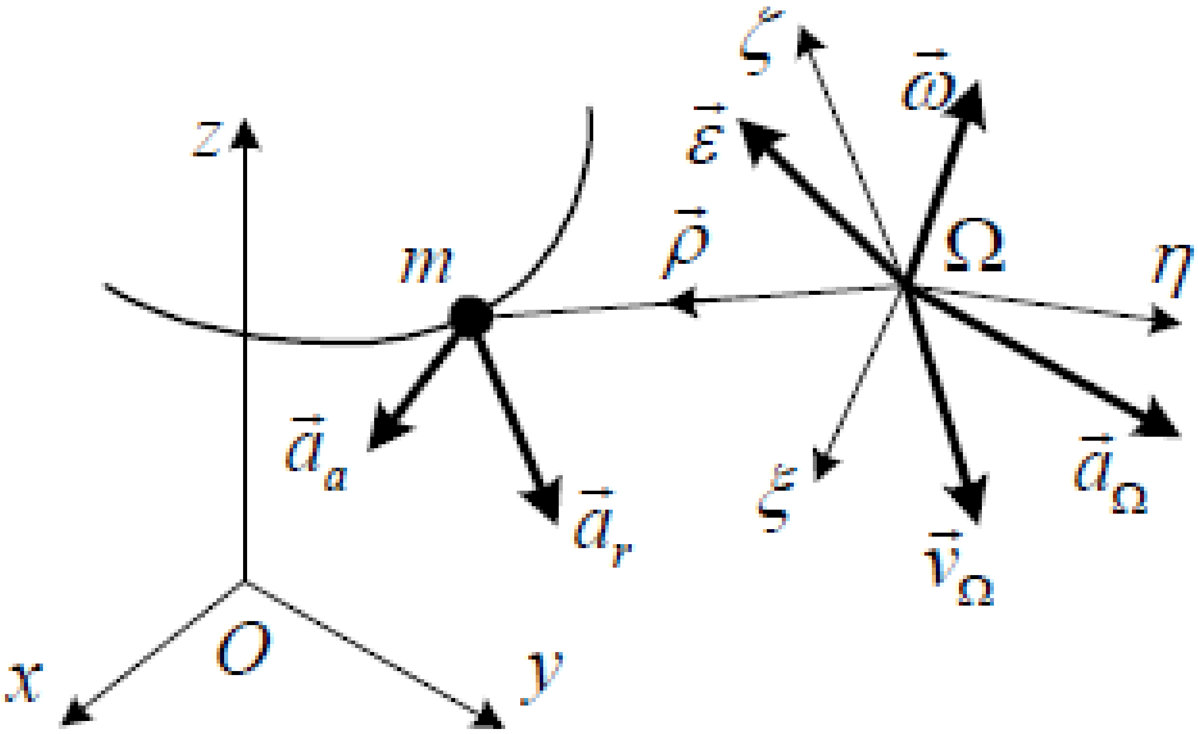
- Speciális esetek: $\vec{\pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \vec{\omega}$, $\quad S$ – a merev test súlypontja,

$\vec{\pi}_P = \underline{\underline{J}}_P \vec{\omega}$, $\quad P$ – a pillanatnyi forgástengely egy pontja ($\vec{v}_P = \vec{0}$

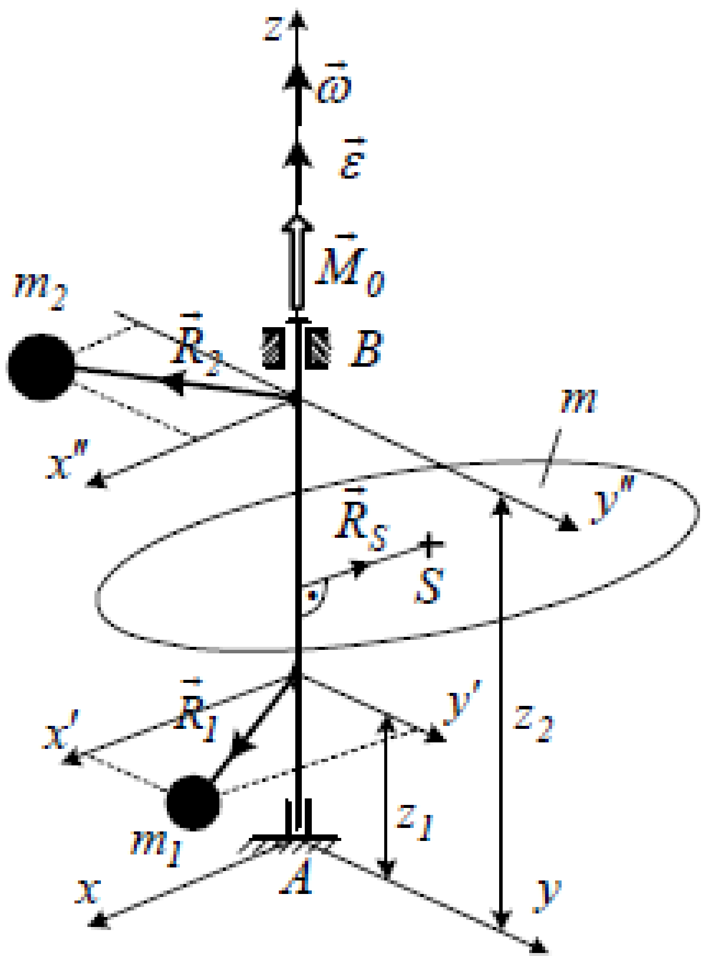
- Általános eset: $\vec{\pi}_A = \underline{\underline{J}}_A \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times \vec{v}_A m$.

Összefüggés test két pontjára számított perdület között: $\vec{\pi}_B = \vec{\pi}_A + \vec{I} \times \vec{r}_{AB}$.

TÖMEGPONT RELATÍV MOZGÁSA

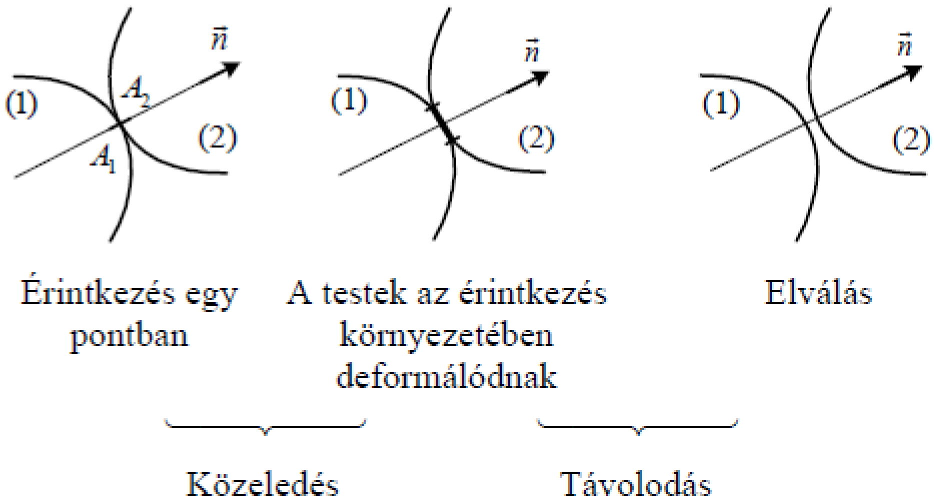


FORGÓ ALKATRÉSZ KIEGYENSÚLYOZÁSA



- súlypont
- forgástengely
- tehetetlenségi főtengely
- tömeg hozzáadása vagy elvétele

ÜTKÖZÉSEK



- **Centrikus ütközés:**
  - az ütközés normálisa átmegy mindkét test súlypontján
    - egyenes ütközés: az S ponti sebességek ütközési normális irányúak
    - ferde ütközés: az S ponti sebességek nem ütközési normális irányúak
- **Excentrikus ütközés:**
  - az ütközési normális nem megy át mindkét test súlypontján

FORONÓMIAI FÜGGVÉNYEK

- **Foromómiai függvényeknek az** $s = s(t), v = v(t), a_e = a_e(t)$ **pályamenti mozgásjellemzők időtől való függését megadó skalár-függvényeket nevezzük.**
- **Összefüggés a foromómiai függvények között:**
  - Ismert s=s(t)

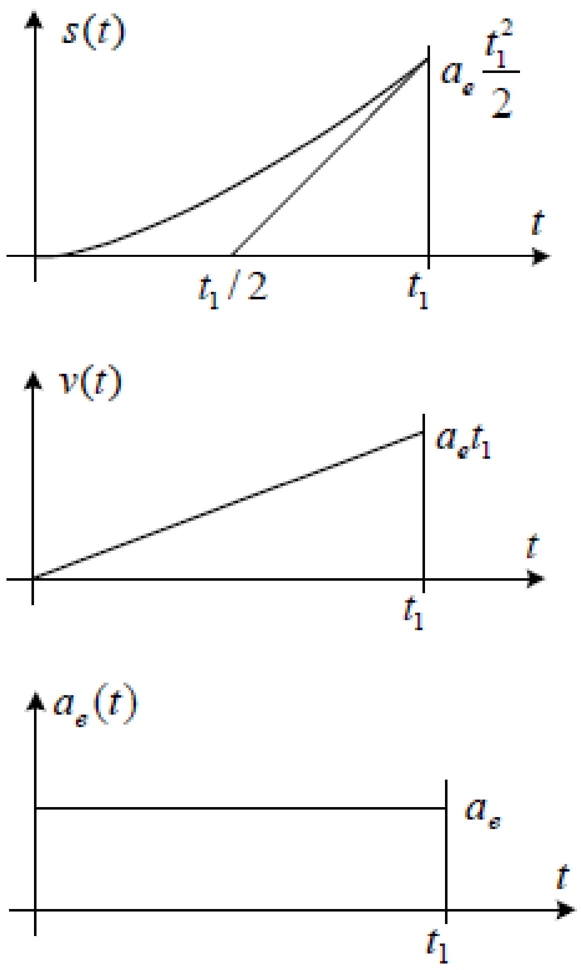
$$v(t) = \frac{d\,s(t)}{dt} \qquad a_e(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

  - Ismert: $a_e = a_e(t)$, s_o , v_o

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_e(t)\,dt \qquad s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

PÉLDA

- **Állandó a_e gyorsulású mozgás foronómiai görbéi**
- **Kezdeti feltételek: $s(t=0)s_0=0$ és $v(t=0)=v_0=0$**



$$s(t) = s_0 + v_0 t + a_e \frac{t^2}{2}$$

A másodfokú fgv (parabola) érintője t=0 helyen az x tengely, $t=t_1$ helyen pedig a $t_1/2$ pontot a fgv értékkel összekötő egyenes.

$$v(t) = v_0 + a_e t$$

MEGOLDÁSI MÓDOK

1. feladat: Ismert: $s = s(t)$.

Meghatározandó:

$$v = v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt},$$

$$a_e = a_e(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

A feladat differenciálással oldható meg.

2. feladat: Ismert: $a_e = a_e(t)$ és a v_0, s_0 kezdeti feltételek.

Meghatározandó:

$$v = v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_e(t)\,dt,$$

$$s = s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt.$$

A feladat integrálással oldható meg.

3. feladat: Ismert: $v = v(t)$ és az, s_0 kezdeti feltétel.

Meghatározandó:

$$a_e = a_e(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}(t) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

$$s = s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt.$$

A feladat differenciálással és integrálással oldható meg.