# Mechanika alapjai

## Hajlítás gyakorlat

# Méretezés - Ellenőrzés

Megkeressük a szerkezet veszélyes keresztmetszetét.

Az a veszélyes keresztmetszet, ahol az $|M_{hz}|$ a legnagyobb.

A méretezést ezen a keresztmetszeten végezzük el:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hz}|}{K_z} \le \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad K_z \geq K_{z\ szüks} = \frac{|M_{hz}|}{\sigma_{meg}}.$$

Megkeressük a szerkezet veszélyes keresztmetszetét.

Az a veszélyes keresztmetszet, ahol az $|M_{hz}|$ a legnagyobb.

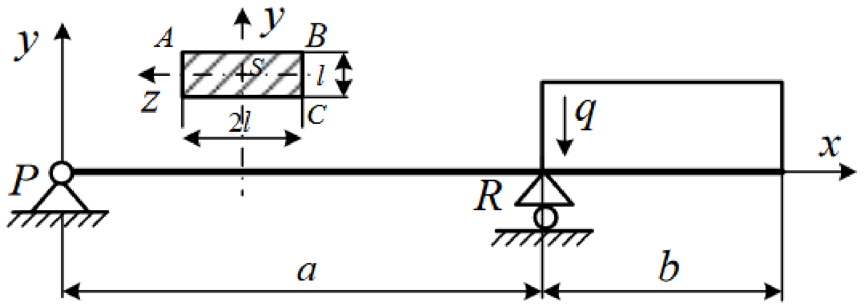
Az ellenőrzést ezen a keresztmetszeten végezzük el:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hz}|}{K_z} \le \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n},$$

$n$ – előírt biztonsági tényező.

Ha ez a reláció teljesül, akkor a rúd szilárdságtani szempontból megfelel.

# Prizmatikus rúd hajlítása - 1

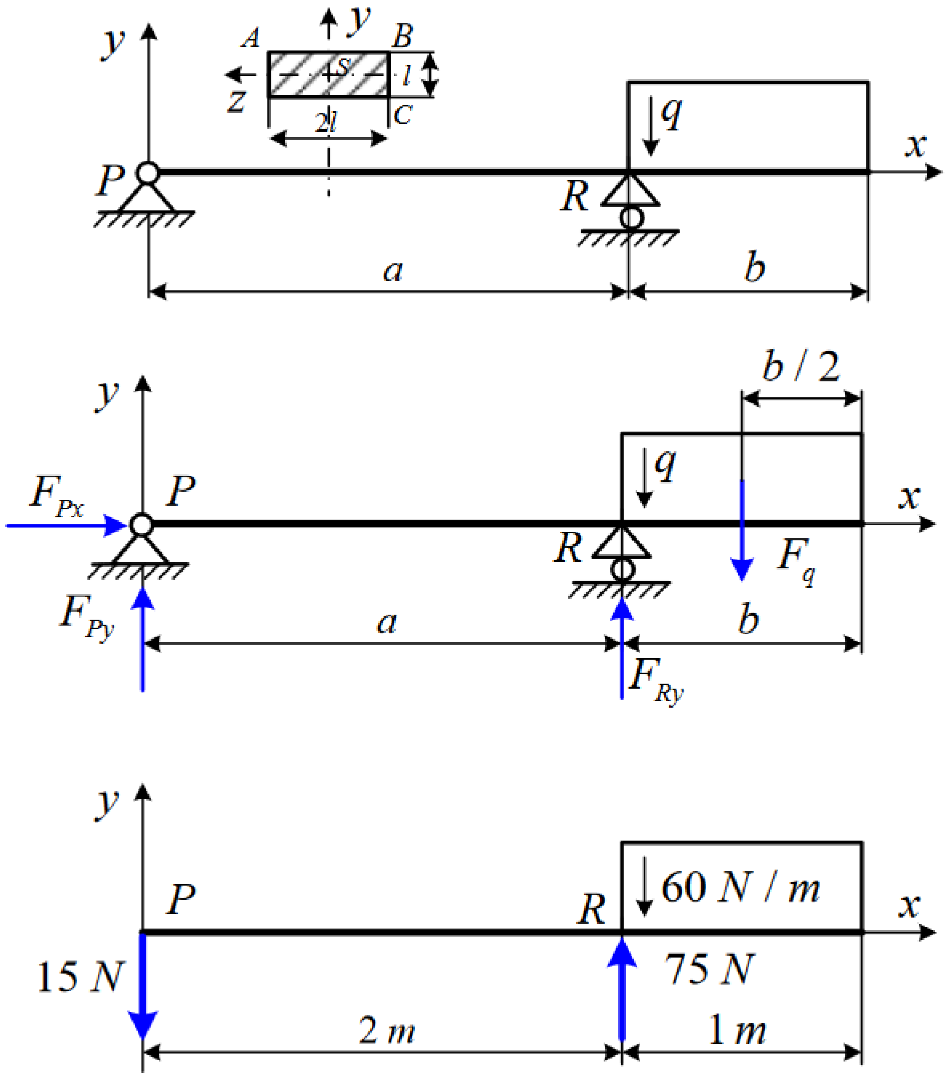



Adott: $a = 2\ m$, $b = 1\ m$,
$q = 60\ N/m$,
$l = 10\ mm$,
$\sigma_{meg} = 120\ MPa$.

Feladat:

a) A tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.
b) Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszet $y$ és $z$ tengelye mentén. Veszélyes pontok meghatározása.
c) Végezze el a tartó szilárdságtani ellenőrzését!
d) Feszültségi tenzor meghatározása a veszélyes keresztmetszet $A$, $B$, $C$ és $S$ pontjaiban!

# Prizmatikus rúd hajlítása - 1




$$F_q = q \cdot a = 60 \cdot 1 = 60\ N\,(\downarrow).$$

$$M_p = F_{Ry} \cdot a - F_q\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0$$

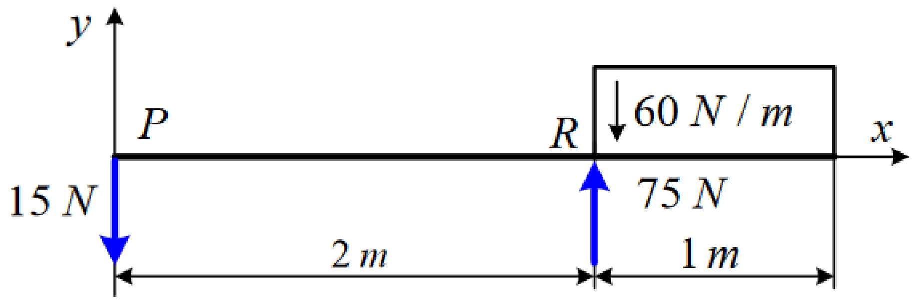
$$\Rightarrow \quad F_{Ry} = 75\ N\,(\uparrow),$$

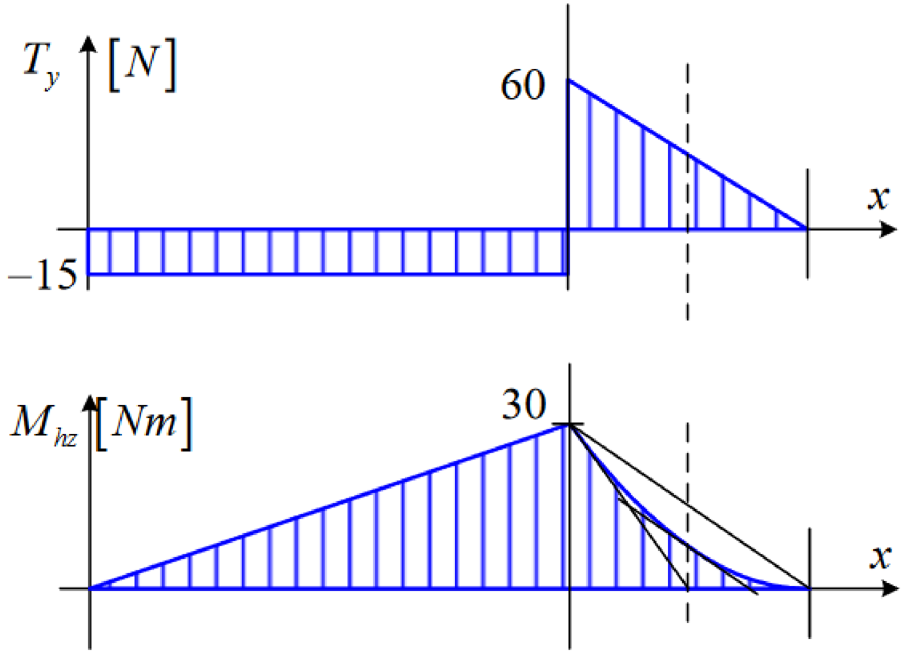
$$M_r = -\left(F_{Py} \cdot a\right) - \left(F_q \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Py} = -15\ N\,(\downarrow),$$

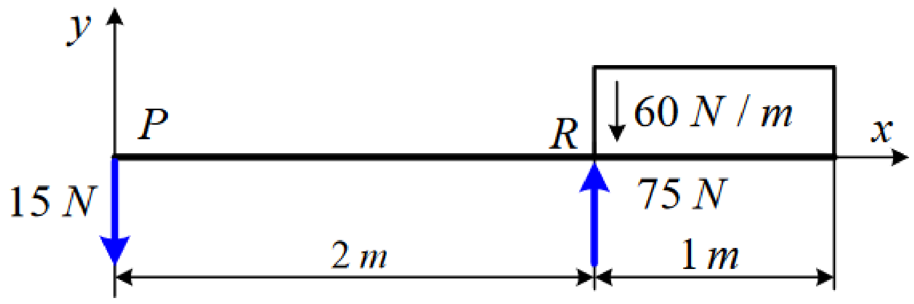
$$F_x = F_{Px} = 0,$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 1

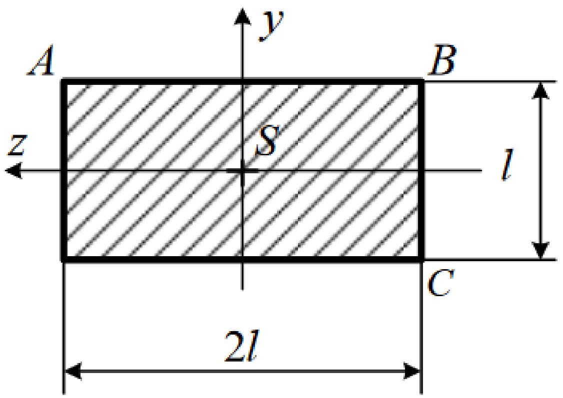


# Prizmatikus rúd hajlítása - 1




b) Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszet $y$ és $z$ tengelye mentén.
Veszélyes pontok meghatározása:



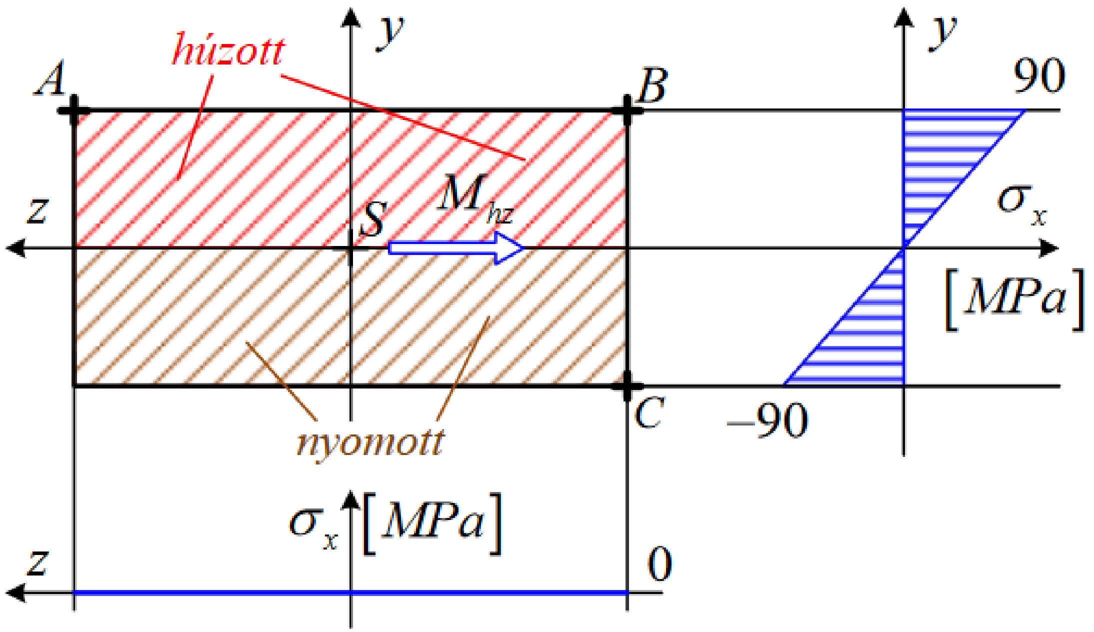

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y \quad \Rightarrow$$

A veszélyes pontok az $y = \pm y_{\max}$ helyen.
Veszélyes pontnak számít így az $A$, $B$ és a $C$ pont is.

A keresztmetszet $z$ tengelyre számolt másodrendű nyomatéka:

$$I_z = \frac{2l \cdot l^3}{12} = \frac{2 \cdot l^4}{12} = \frac{2 \cdot 10^4}{12} = \frac{5}{3} 10^3 = 1666{,}67\ mm^4$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 1




$$\sigma_x(A) = \sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z}\frac{l}{2} =$$

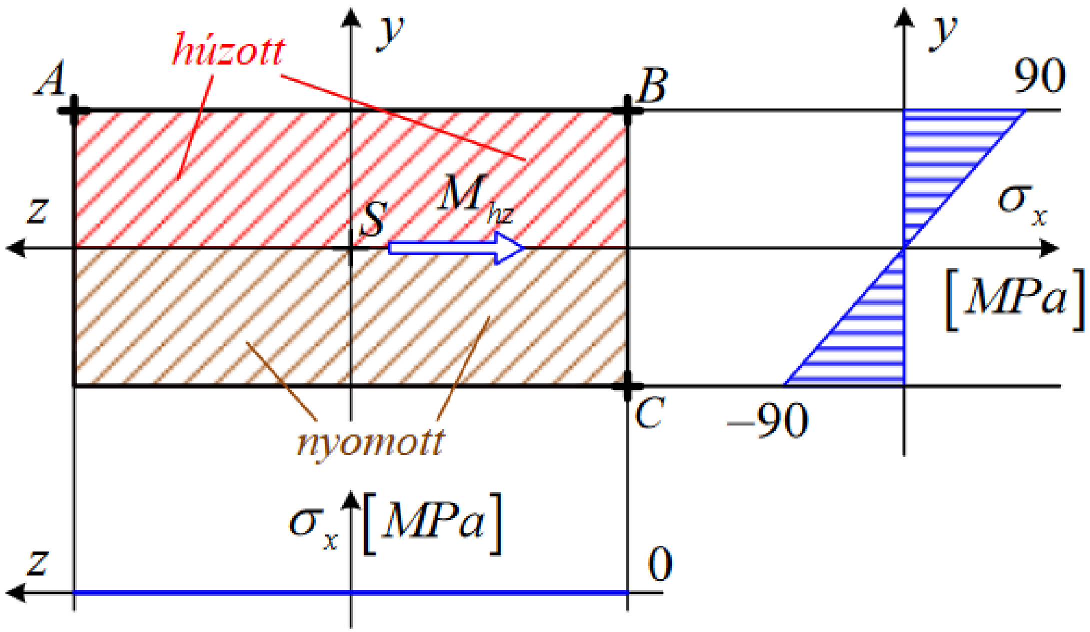
$$= \frac{3 \cdot 10^4}{\frac{5}{3}10^3}\frac{10}{2} = 90\ MPa.$$

$$\sigma_x(A) = \sigma_x(B) = 90\ MPa.$$

$$\sigma_x(C) = \frac{M_{hz}}{I_z}\left(-\frac{l}{2}\right) = -90\ MPa.$$

$$\sigma_x(S) = \frac{M_{hz}}{I_z}y_S(=0) = 0\ MPa.$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 1




$$\sigma_x(A)=\sigma_x(B)=\frac{M_{hz}}{I_z}\frac{l}{2}=$$

$$=\frac{3\cdot 10^4}{\frac{5}{3}10^3}\frac{10}{2}=90\ MPa.$$

$$\sigma_x(A)=\sigma_x(B)=90\ MPa.$$

$$\sigma_x(C)=\frac{M_{hz}}{I_z}\left(-\frac{l}{2}\right)=-90\ MPa.$$

$$\sigma_x(S)=\frac{M_{hz}}{I_z}y_S(=0)=0\ MPa.$$

Zérusvonal egyenlete: $y=0$

A zérusvonal egyik oldalán a keresztmetszetet mindig húzott, a másikon nyomott.

# Prizmatikus rúd hajlítása - 1

c) A tartó szilárdságtani ellenőrzése:

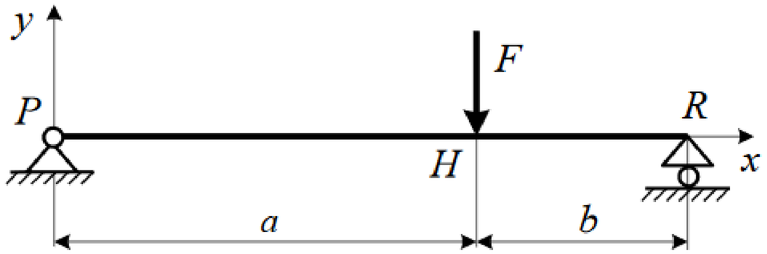
$$\sigma_{x\,\max} = \left|\sigma_x(A)\right| = \left|\sigma_x(B)\right| = \left|\sigma_x(C)\right| = 90\ MPa \quad < \quad \sigma_{meg} = 120\ MPa,$$

tehát a tartó szilárdságtanilag megfelel!

d) Feszültségi tenzor a veszélyes keresztmetszet $A$, $B$, $C$ és $S$ pontjaiban!

$$\left[\underline{\underline{F}}_A\right] = \left[\underline{\underline{F}}_B\right] = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa, \quad \left[\underline{\underline{F}}_C\right] = \begin{bmatrix} -90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa, \quad \left[\underline{\underline{F}}_S\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa.$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 2




Adott:

$R_{p0,2} = 150\ MPa$, $D = 1{,}5d$,

$n_{bizt} = 1{,}4$, $F = 5\ kN$,

$a = 600\ mm$, $b = 300\ mm$.

Feladat:

a) A tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.

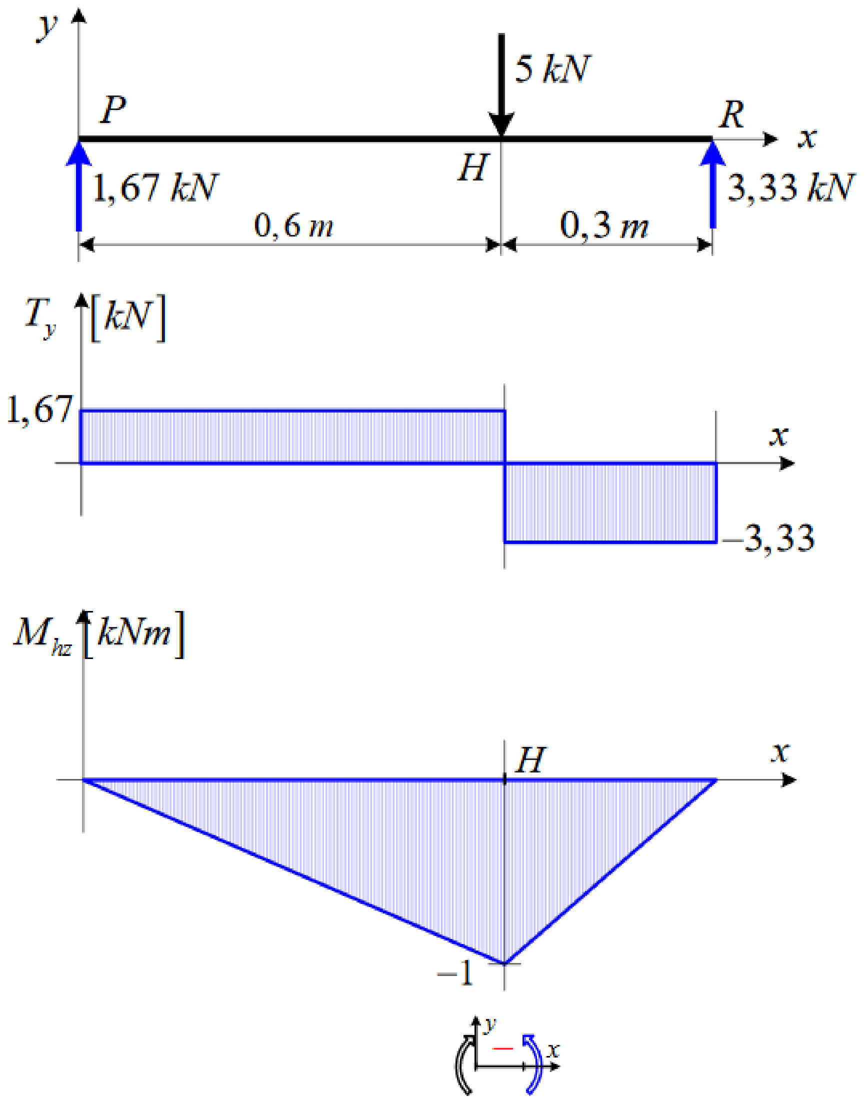
b) Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszet $y$ és $z$ tengelye mentén. Veszélyes pontok meghatározása.

c) Végezze el a tartó szilárdságtani méretezését!

d) Feszültségi tenzor meghatározása a veszélyes keresztmetszet $A$, $S$, $B$ és $C$ pontjaiban!

$A(0, D/2)$; $B(d/2;0)$; $C(D/2;0)$.

# Prizmatikus rúd hajlítása - 2




$$M_p = F_{Ry} \cdot (a+b) - F \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Ry} = F\frac{a}{a+b} = 3,33\ kN\,(\uparrow),$$

$$M_r = F \cdot b - F_{Py}(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Py} = F\frac{b}{a+b} = 1,67\ kN\,(\uparrow),$$

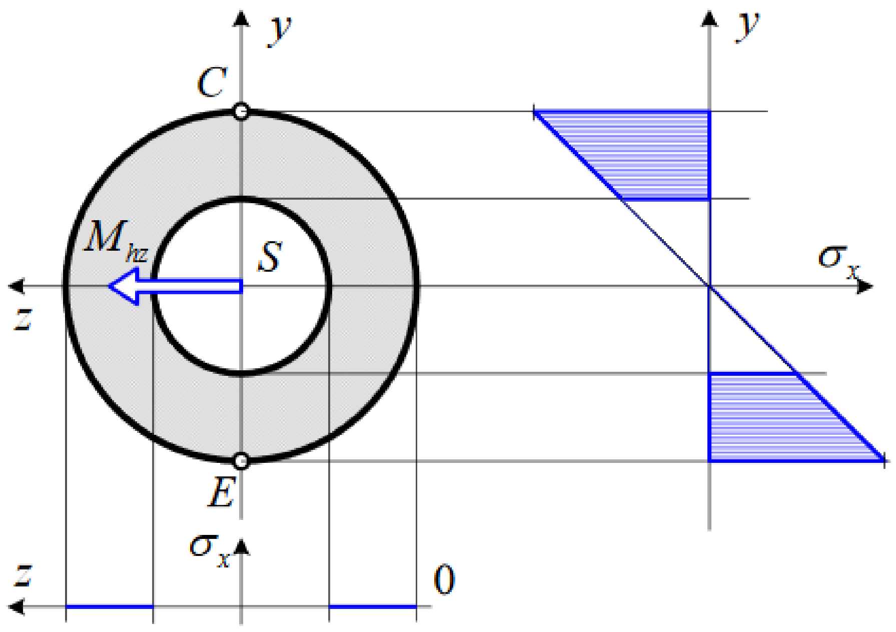
$$F_x = F_{Px} = 0,$$

$$M_{hz}(H) = M_{hz}(P) - \int_{x_P}^{x_H} T_y(x)\,dx$$

$$M_{hz}(H) = 0 - (1,67a) = -1\ kNm.$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 2

b) Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszet $y$ és $z$ tengelye mentén. Veszélyes pontok meghatározása.




A veszélyes pontok az

$$y = \pm y_{\max} = \pm \frac{D}{2} = \frac{1,5d}{2} = 0,75d \text{ helyen.}$$

Veszélyes pontnak számít a $C$ és a $E$ pont is.

A keresztmetszet $z$ tengelyre számolt másodrendű nyomatéka:

$$I_z = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{64} = \frac{\left[(1,5d)^4 - d^4\right]\pi}{64}$$

$$I_z = \frac{4,0625 \cdot d^4 \pi}{64}.$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 2

c) A tartó szilárdságtani méretezése: $\left(R_{p0,2} : folyáshatárra\right)$

A megengedett feszültség: $\sigma_{meg} = \dfrac{R_{p0,2}}{n_{bizt}} = \dfrac{150}{1,4} = 107,1\ MPa$.

A tartó szilárdságtanilag megfelel, ha teljesül a következő feltétel: $\sigma_{x\max} \le \sigma_{meg}$.

$$\sigma_{x\max} = \left|\sigma_x(C)\right| = \left|\sigma_x(E)\right| = \frac{\left|M_{hz}\right|}{I_z} \cdot \left|y_{\max}\right| = \frac{\left|M_{hz}\right|}{\dfrac{4,0625 \cdot d^4 \pi}{64}} \cdot 0,75 \cdot d$$

$$\frac{\left|M_{hz}\right|}{\dfrac{4,0625 \cdot d^4 \pi}{64}} \cdot 0,75 \cdot d \le \sigma_{meg}$$

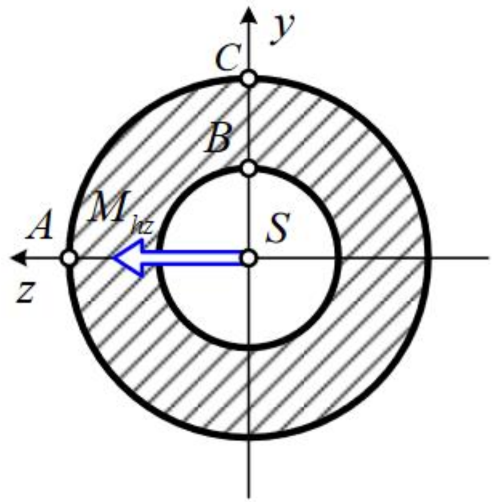
$$\sqrt[3]{\frac{48\left|M_{hz}\right|}{4,0625 \cdot \pi \cdot \sigma_{meg}}} \le d$$

$$\sqrt[3]{\frac{48 \cdot 1 \cdot 10^6}{4,0625 \cdot 3,14 \cdot 107,1}} \le d$$

$$32,75\ mm \le d$$

Kerekítéssel a cső méretei legyenek: $\varnothing d = 33\ mm$, $\varnothing D = 1,5d = 50\ mm$.

# Prizmatikus rúd hajlítása - 2




Az $A$, $S$, $B$ és $C$ pontokhoz tartozó feszültségi tenzor mátrixa:

$$\sigma_x(S) = \sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y(=0) = 0\ MPa$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_S\right] = \left[\underline{\underline{F}}_A\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa.$$

$$I_z(d=33) = \frac{4{,}0625 \cdot 33^4 \pi}{64} = 236493\ \text{mm}^4$$

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z}\frac{d}{2} = \frac{\left(-1 \cdot 10^6\right)}{236493}\frac{(+33)}{2} = -69{,}77\ MPa$$

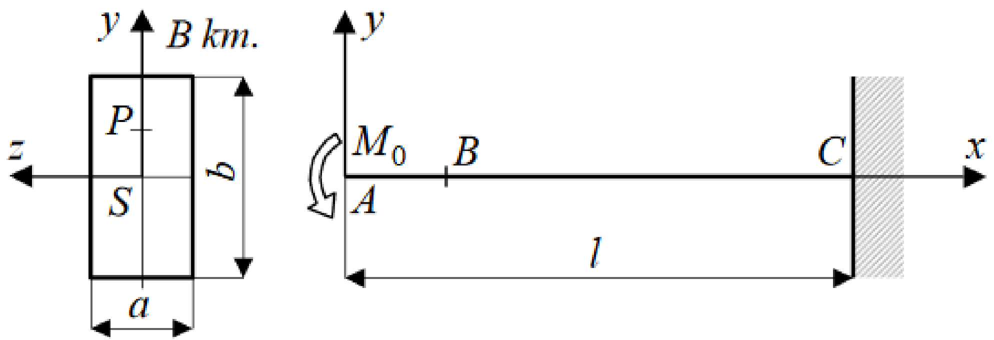
$$\left[\underline{\underline{F}}_B\right] = \begin{bmatrix} -69{,}77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\sigma_{x\max}(C) = \frac{M_{hz}}{I_z}\frac{D}{2} = \frac{\left(-1 \cdot 10^6\right)}{236493}\frac{(+50)}{2} = -105{,}71\ MPa$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_C\right] = \begin{bmatrix} -105{,}71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\sigma_{x\max}(E) = \left|\sigma_{x\max}(C)\right| = +105{,}71\ MPa$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 3




Adott:

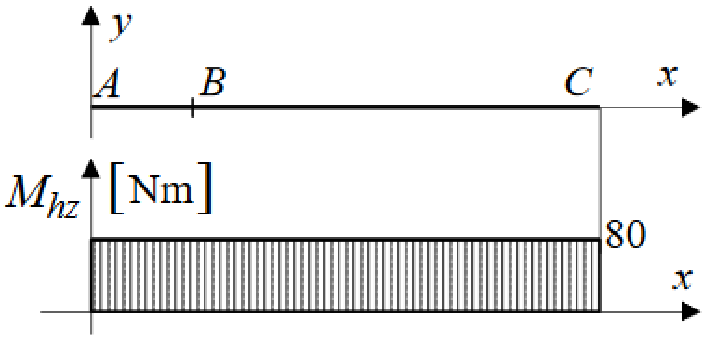
$M_0 = 80\,Nm$, $l = 5\,m$,
$a = 10\,mm$, $b = 20\,mm$,
$P(100;\,5;\,0\,)\,mm$,
$E = 2\cdot 10^5\ MPa$.

Feladat:

a) A hajlító nyomatéki ábra megrajzolása.
b) Feszültségeloszlás megrajzolása a $B$ jelű keresztmetszeten.
c) A keresztmetszet másodrendű nyomatékainak meghatározása.
d) Feszültségállapot meghatározása a $B$ jelű keresztmetszet $P$ pontjában.
e) A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása.
f) A rúdban felhalmozott alakváltozási energia meghatározása.

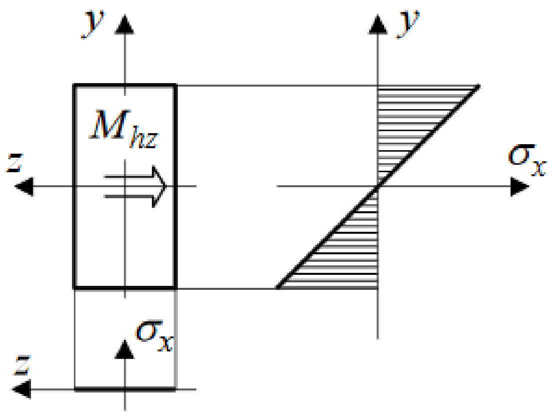
# Prizmatikus rúd hajlítása - 3

a) A hajlító nyomatéki ábra megrajzolása:




b) Feszültségeloszlás megrajzolása a *B* jelű keresztmetszeten:

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y$$



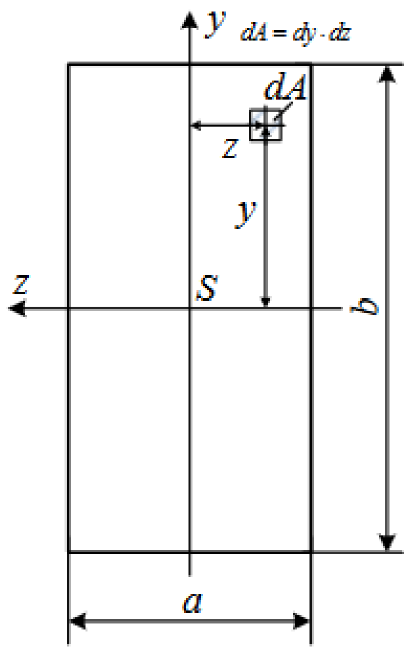
# Prizmatikus rúd hajlítása - 3

c) A keresztmetszet másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékainak meghatározása:

$$I_z = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dz dy = [z]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{a\,b^3}{12}$$

$$I_y = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dz dy = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{b\,a^3}{12}$$

$$I_{zy} = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z\,y\,dz dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=-\frac{a}{2}}^{z=\frac{a}{2}} = 0$$



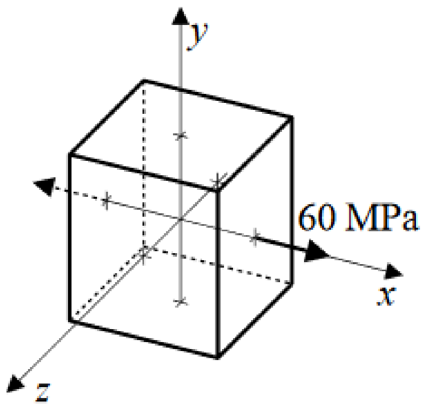
# Prizmatikus rúd hajlítása - 3

d) Feszültségállapot (egytengelyű) meghatározása a $B$ jelű keresztmetszet $P$ pontjában:

$$\left[\underline{\underline{F}}_P\right]=\begin{bmatrix}\sigma_x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad I_z=\frac{a\,b^3}{12}=\frac{10\cdot 20^3}{12}=\frac{10\cdot 8\cdot 10^3}{12}=\frac{2}{3}10^4\,mm^4,$$

$$\sigma_x(P)=\frac{M_{hz}}{I_z}\,y_P=\frac{80\cdot 10^3}{\frac{2}{3}10^4}5=60\,MPa\,.$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_P\right]=\begin{bmatrix}60 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}MPa\,.$$



# Prizmatikus rúd hajlítása - 3

e) A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása:

$$\sigma_{xmax} = \frac{M_{hz}}{I_z} y_{max} = \frac{M_{hz}}{I_z} \frac{b}{2} = \frac{80 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} 10^4} 10 = 120\, MPa\,.$$

A $z$ tengelyre számított $K_z$ keresztmetszeti tényezővel:

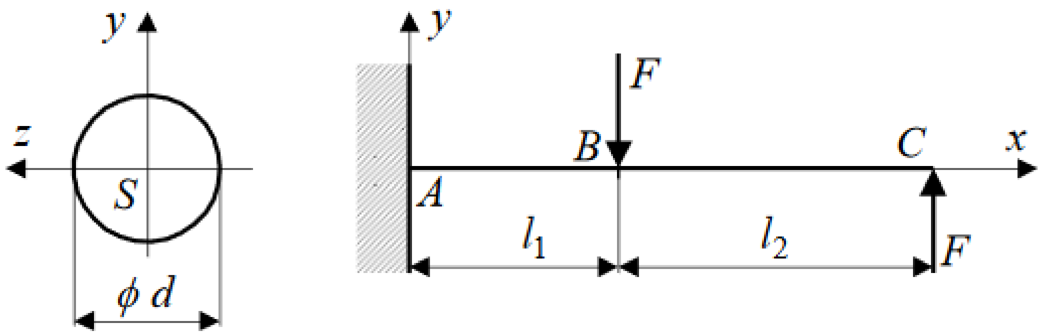
$$K_z = \frac{2\, I_z}{b} = \frac{a\, b^2}{6} = \frac{10 \cdot 20^2}{6} = \frac{2}{3} 10^3\, mm^3\,,$$

$$\sigma_{xmax} = \frac{M_h}{K_z} = \frac{80 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} 10^3} = 120\, MPa\,.$$

f) A rúdban felhalmozott alakváltozási energia meghatározása:

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_{hz}^2}{I_z E} l = \frac{1}{2} \frac{(80 \cdot 10^3)^2}{\frac{2}{3} 10^4 \cdot 2 \cdot 10^5} 5 \cdot 10^3 = 12000\, Nmm = 12\, J\,.$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 4




Adott:

$F = 5\,kN$, $l_1 = 2\,m$, $l_2 = 3\,m$,

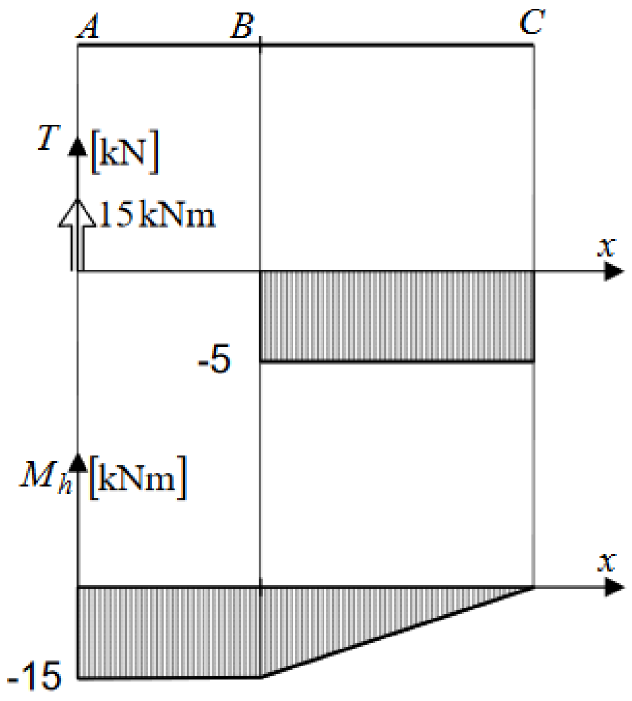
$\sigma_{meg} = 150\ MPa$.

Feladat:

a) A rúd igénybevételi ábráinak a megrajzolása.
b) Feszültségeloszlás megrajzolása az $AB$ rúdszakasz egy tetszőleges keresztmetszetén.
c) Másodrendű nyomatékok képletének felírása
d) A rúd méretezése hajlításra.

# Prizmatikus rúd hajlítása - 4

a) A rúd igénybevételi ábráinak a megrajzolása:



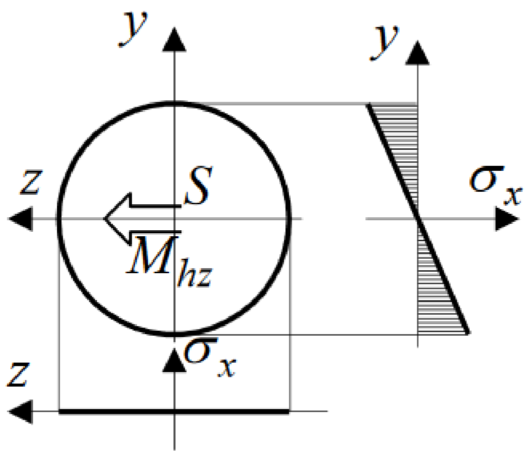

Az *AB* rúdszakaszon tiszta hajlítás van.

Egyenes hajlítás, mert kör keresztmetszet esetén minden súlyponti tengely tehetetlenségi főtengely.

Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak esetén csak egyenes hajlítás értelmezhető.

# Prizmatikus rúd hajlítása - 4

b) Feszültségeloszlás megrajzolása az $AB$ rúdszakasz egy tetszőleges keresztmetszetén:




c) Másodrendű nyomatékok képletének felírása:

Kör keresztmetszet:

$$I_z = I_y = \frac{d^4 \pi}{64};$$

Körgyűrű keresztmetszet:

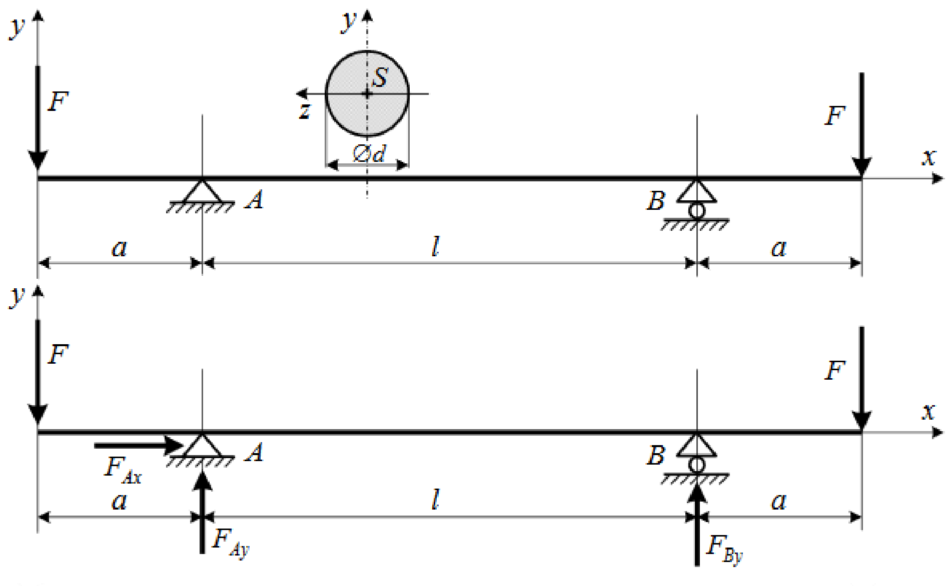
$$I_z = I_y = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}.$$

d) A rúd méretezése hajlításra: $\sigma_{xmax} = \frac{|M_{hmax}|}{I_z} |y_{max}| \le \sigma_{meg}$.

$$\frac{|M_{hmax}|}{\frac{d^4 \pi}{64}} \frac{d}{2} = \frac{|M_{hmax}|}{\frac{d^3 \pi}{32}} \le \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{32|M_{hmax}|}{\pi \sigma_{meg}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15 \cdot 10^6}{150\pi}} = 100,62\,mm.$$

$$d \ge 100,62\,mm \quad \Rightarrow \quad \text{legyen } d = 105\,mm.$$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 5




Adott:

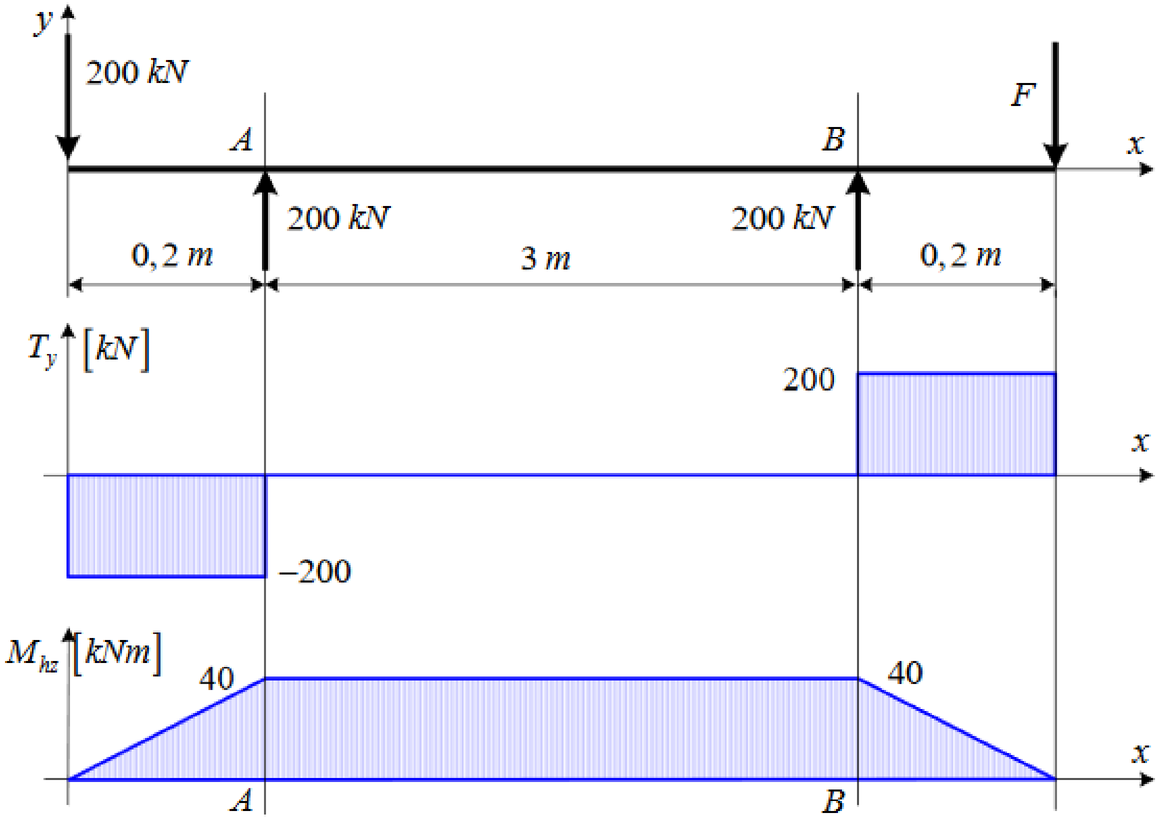
$F = 200\,kN$, $a = 0,2\,m$, $l = 3\,m$,

$E = 2 \cdot 10^5\,MPa$, $\sigma_{meg} = 220\,MPa$.

Feladat:

Szilárdságtani méretezés, $d = ?$

# Prizmatikus rúd hajlítása - 5




$$M_a = F_{By} l + Fa - F(a+l) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{By} = F = 200\ kN\ (\uparrow)$$

$$M_b = -F_{Ay} l + F(a+l) - Fa = 0$$

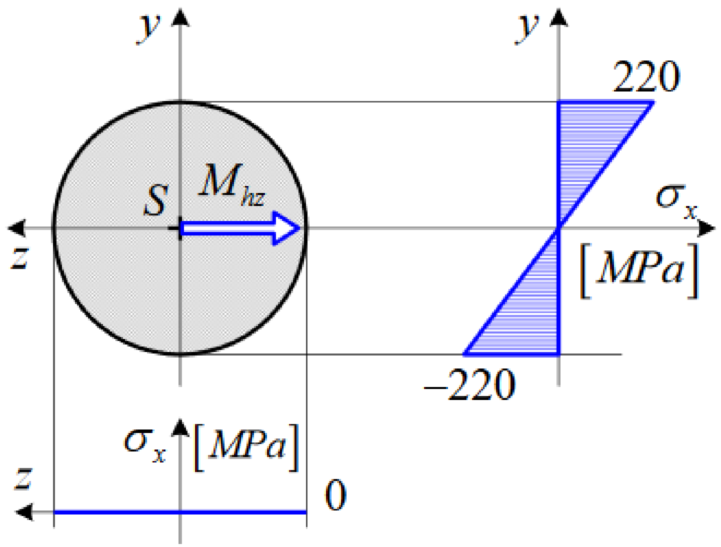
$$\Rightarrow \quad F_{Ay} = F = 200\ kN\ (\uparrow)$$

$$F_x = F_{Ax} = 0$$

$$M_{hz}(A) = 200 \cdot 0{,}2 = 40\ kNm$$

Veszélyes keresztmetszet a tengely $A$ és $B$ jelű keresztmetszete között lévő összes keresztmetszet, így az $A$ és $B$ jelű keresztmetszet is.

# Prizmatikus rúd hajlítása - 5




b) A tartó szilárdsági méretezése:

$$\sigma_{xmax} = \sigma_x(A) = \frac{|M_{hmax}|}{K_z} \le \sigma_{meg}$$

$$K_{z\,sz\ddot{u}ks} \ge \frac{|M_{hmax}|}{\sigma_{meg}} = \frac{40 \cdot 10^6\ Nmm}{220\ \frac{N}{mm}} = 181818{,}18\ mm^3$$

$$I_{z\,sz\ddot{u}ks} = \frac{d^4\pi}{64}, \quad K_{z\,sz\ddot{u}ks} = \frac{I_{z\,sz\ddot{u}ks}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow$$

$$K_{z\,sz\ddot{u}ks} = \frac{d^3\pi}{32} \Rightarrow d_{sz\ddot{u}ks} = \sqrt[3]{\frac{K_{z\,sz\ddot{u}ks} \cdot 32}{\pi}}$$

$$d_{sz\ddot{u}ks} = \sqrt[3]{\frac{181818{,}18 \cdot 32}{\pi}} = 122{,}8\ mm\,.$$

Legyen: $d = 123\ mm$