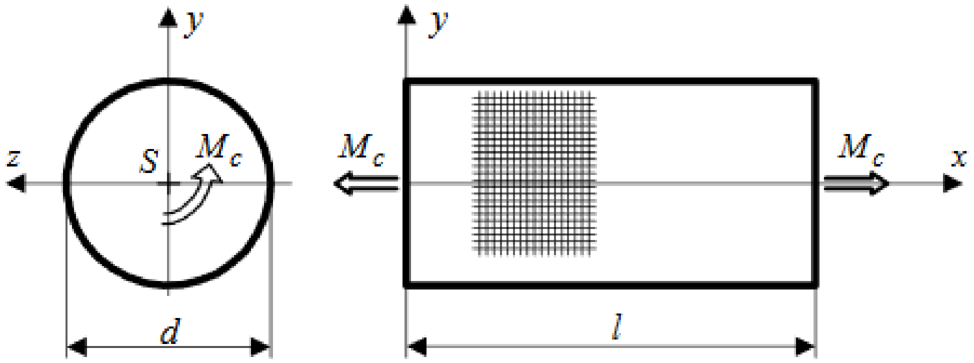
Mechanika alapjai

Tiszta csavarás

Definíció

- Kör és körgyűrű keresztmetszet



- A rúd keresztmetszetei síkok maradnak és alakjuk nem változik: $d' = d$.

- A rúd keresztmetszetei nem mozdulnak el az x tengely irányában: $l' = l$.

- A rúd keresztmetszetei az x tengely körül elfordulnak. (Az elfordulás mértéke az x tengely mentén lineárisan változik.)

Alakváltozási és feszültségi állapot

$$\underset{(R\varphi x)}{\left[\underline{\underline{A}}\right]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi x} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{x\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{\varphi x} = \gamma_{x\varphi} = \vartheta R .$$

Az alakváltozási állapot <u>nem homogén:</u> $\gamma_{x\varphi} = \gamma_{\varphi x} = \gamma(R)$.

A γ szögtorzulás az R változó (helykoord.) lineáris függvénye.

Érvényes a csavarásra vonatkozó *Hooke*-törvény:

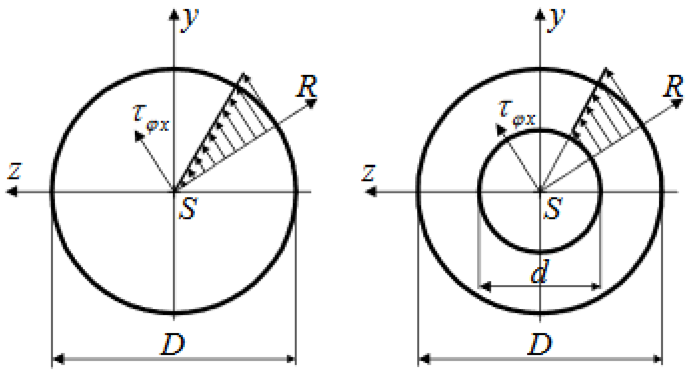
$$\tau_{x\varphi} = G\gamma_{x\varphi} = G\vartheta R, \quad \tau_{\varphi x} = G\gamma_{\varphi x} = G\vartheta R .$$

G – a csúsztató rugalmassági modulus (anyagjellemző).

A G csúsztató rugalmassági modulus nem független az E rugalmassági modulustól: $E = 2G(1+\nu)$.

$$\underset{(R\varphi x)}{\left[\underline{\underline{F}}\right]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi x} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = G\vartheta R .$$

Feszültségeloszlás: $\tau_{x\varphi} = \tau_{x\varphi}(R) = \underbrace{G\vartheta}_{\text{állandó}} R$.



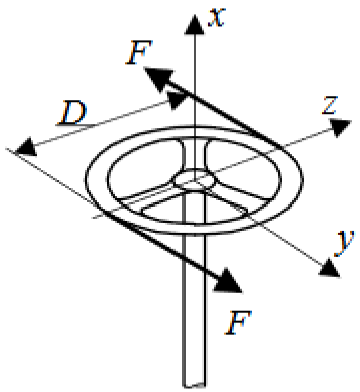
Feszültség csak ott ébred, ahol anyag van (jobb oldali ábra).

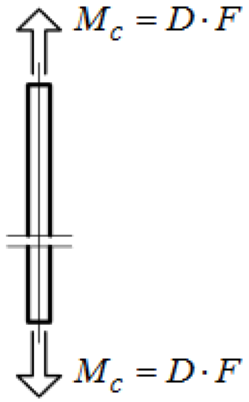
A feszültség – igénybevétel kapcsolat: $\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = \underbrace{G\vartheta}\, R = \dfrac{M_c}{I_p} R$.

Méretezés- ellenőrzés

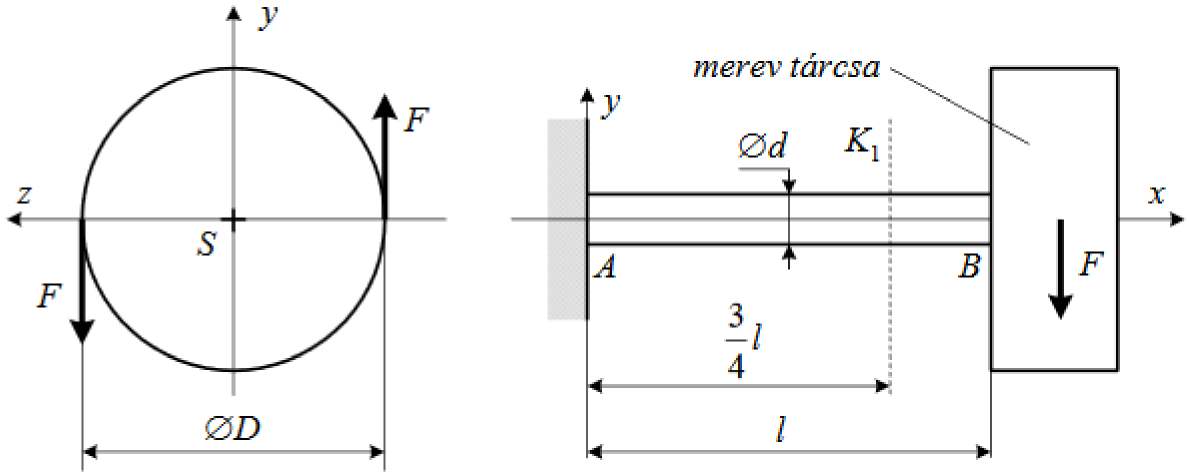
Ha $\tau_{\max} \leq \tau_{meg} = \dfrac{\tau_{jell}}{n}$, akkora rúd szilárdságtani szempontból megfelel (n – előírt biztonsági tényező).

- *Méretezés:* $\tau_{\max} = \dfrac{M_c}{K_p} \leq \tau_{meg} \quad \Rightarrow K_p \geq K_{p\,szüks} = \dfrac{M_c}{\tau_{meg}}$.





Példa



Adott:

$F = 27\,N$, $D = 600\,mm$, $d = 10\,mm$, $l = 1\,m$, $\tau_{meg} = 80\,MPa$, $G = 80\,GPa$, $(y_D = 3\,mm)$.

Feladat:

a) A rúd igénybevételi ábráinak meghatározása!

b) A K_1 keresztmetszet D pontjához tartozó $\left[\underline{\underline{F}}_D\right]$ feszültségi tenzort kiszámítása!

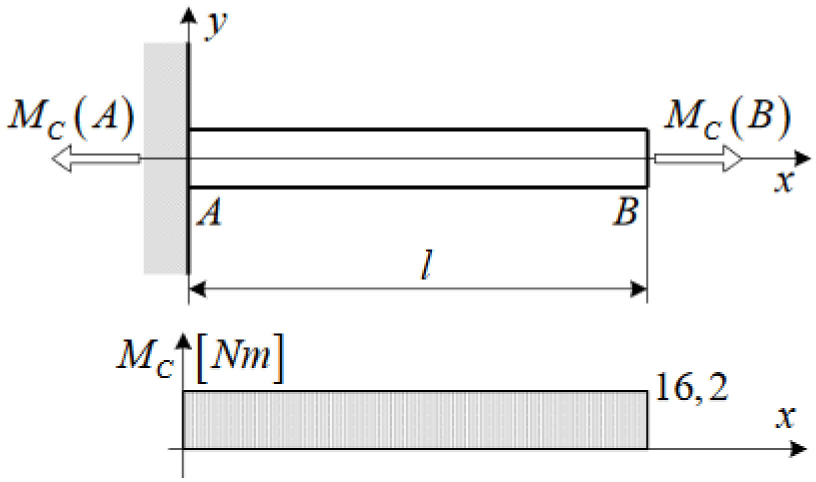
c) A feszültségeloszlás meghatározása a keresztmetszet R , y és z tengelye mentén!

d) A rúdban fölhalmozott alakváltozási energia kiszámítása!

e) A rúd B keresztmetszetében a ψ_B szögelfordulás meghatározása!

f) A rúd szilárdságtani ellenőrzése!

a) A rúd igénybevételi ábrái:



A rúd igénybevétele csavarás:

$$M_C = F \cdot D = 27 \cdot 0,6 = 16,2\ Nm\,.$$

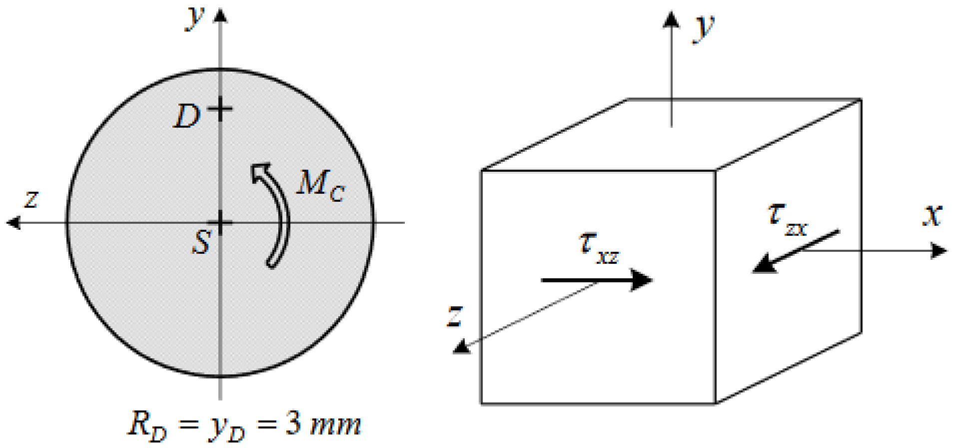
$$\underset{(R\varphi x)}{\left[\underline{\underline{F}}_P\right]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi x} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & 0 \end{bmatrix} MPa,$$

$$\tau_{\varphi x} = \frac{M_C}{I_P} R$$

$$I_P = 2 \cdot I_z = \frac{d^4 \pi}{32}, \quad K_P = 2 \cdot K_z = \frac{d^3 \pi}{16}$$

$$\underset{(xyz)}{\left[\underline{\underline{F}}_P\right]} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa\,, \tau_{zx} = \frac{M_C}{I_P} y, \quad \tau_{yx} = -\frac{M_C}{I_P} z$$

b) A K_1 keresztmetszet D pontjához tartozó $\left[\underline{\underline{F}}_D\right]$ feszültségi tenzor:



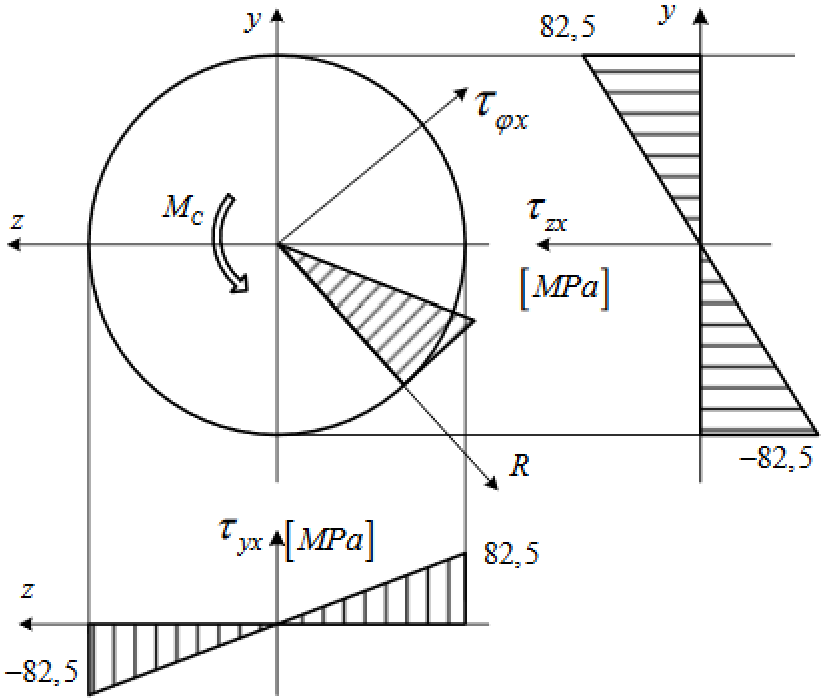
$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{10^4 \pi}{32} = 981,75\ mm^4 ,$$

$$\tau_{\varphi x}(D) = \frac{M_C}{I_P} R_D = \frac{16,2 \cdot 10^3}{981,75} 3 = 49,5\ MPa$$

$$\tau_{zx}(D) = \tau_{xz}(D) = 49,5\ MPa .$$

A D pont feszültségi állapotát jellemző tenzor: $\left[\underline{\underline{F}}_D\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 49,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 49,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$

c) Feszültségeloszlás a keresztmetszet R, y és z tengelye mentén:



$$\tau_{\max} = \frac{M_C}{K_p} = \frac{M_C}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{16{,}2\cdot 10^3}{981{,}75}\frac{10}{2} = 82{,}5\ MPa\,.$$

d) A rúdban fölhalmozott (rugalmas) alakváltozási energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_C^2 l}{I_p G},$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{\left(16{,}2\cdot 10^3\right)^2\cdot 10^3}{981{,}75\cdot 0{,}8\cdot 10^5} = 1670{,}74\ Nmm = 1{,}67\ J$$

e) A rúd B keresztmetszetének ψ_B szögelfordulása:

A rúd fajlagos szögelfordulása: $\vartheta = \dfrac{M_C}{I_p G} = \dfrac{16,2 \cdot 10^3}{981,75 \cdot 0,8 \cdot 10^5} = 2,063 \cdot 10^{-4} \dfrac{rad}{mm}$,

Az A és B keresztmetszetek közötti szögelfordulás:

$$\psi_{AB} = \vartheta \cdot l = 2,063 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 = 0,2063\, rad. \quad \Rightarrow \psi_{AB} = 0,2063 \frac{180^0}{\pi} = 11,8^0$$

f) A rúd szilárdságtani ellenőrzése:

A rúd szilárdságtanilag megfelel, ha $\tau_{\max} \le \tau_{meg}$ feltétel teljesül.

$\tau_{\max} = 82,5\, MPa > \tau_{meg} = 80\, MPa$, tehát a rúd nem felel meg!